Cours 2

# Limite d'une Fonction

## Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

12 novembre 2026

# Plan

Introduction

2.1 Définition de la Limite d'une Fonction

2.2 Opérations sur les Limites
- Lever l'Indétermination
- Limite d'une Fonction Composée

2.3 Théorème des Gendarmes

2.4 Limites à Droite et à Gauche

2.5 Asymptotes
- Asymptotes Horizontale et Verticale
- Asymptote Oblique

À retenir

# Introduction

Que devient $f(x)$ quand $x$ s'approche d'un nombre, ou devient très grand ? Cette leçon définit la limite d'une fonction, donne les règles pour la calculer, et en tire les asymptotes d'une courbe.

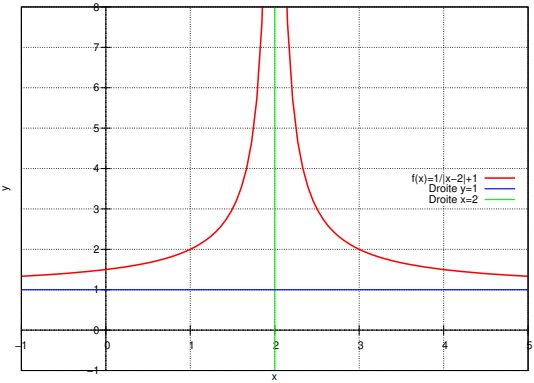
# Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le calcul algébrique, la notion de fonction, la valeur absolue ; la limite d'une suite (cours 1 [1]) aide à comprendre la définition.
- **Les objets :** la limite d'une fonction en un réel ou en l'infini, finie ou infinie ; les opérations sur les limites et les formes indéterminées ; la limite d'une fonction composée ; le théorème des gendarmes ; les limites à droite et à gauche ; les asymptotes horizontales, verticales et obliques.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer une limite, lever une indétermination par factorisation ou par la forme conjuguée, encadrer une fonction pour trouver sa limite, trouver les asymptotes d'une courbe.
- **Et ensuite :** le cours 3 [2], la continuité. Le Théorème 2.1 (iv) s'appuie déjà sur la continuité des fonctions usuelles, établie dans le cours 3, et le Théorème 2.4 peut faire appel, quand $b$ est réel, à la continuité de $g$ en $b$.

# 2.1 Définition de la Limite d'une Fonction

On traduit « $f(x)$ s'approche de $\ell$ quand $x$ s'approche de $a$ » à l'aide de voisinages.

# Intuition : une Première Courbe




Courbe de $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 1$ : quand $x$ devient très grand, $f(x)$ s'approche de 1 ; quand $x$ s'approche de 2, $f(x)$ devient très grand. Ce sont deux limites, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ (Exemple 2.9).

**Rappels.** L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels comprend par exemple $-2$, $-\frac{1}{2}$, $0$, $\frac{3}{4}$, $1$, $\sqrt{2}$, $\pi$. Une fonction $f$ définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}$ associe à chaque $x \in D$ un réel $f(x)$ : $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

**Intuition.** $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ veut dire que, quand $x$ s'approche de $a$, son image $f(x)$ s'approche de $\ell$.

**Définition 2.1 (Voisinage).**

(i) Un *voisinage* d'un réel $a$ est un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$, avec $\delta > 0$ ; noter que $x \in ]a - \delta, a + \delta[$ équivaut à $|x - a| < \delta$.

(ii) Un voisinage de $+\infty$ est un intervalle $]K, +\infty[$, et un voisinage de $-\infty$ un intervalle $]-\infty, K[$, avec $K$ réel.

« $x$ s'approche de $a$ » se traduit par : $x$ est dans un voisinage de $a$, aussi petit soit-il ; « $x$ s'approche de $+\infty$ » par : $x > K$ pour un réel $K$ aussi grand soit-il.

# Limite d'une Fonction : la Définition

**Définition 2.2 (Limite d'une Fonction).** Soit $f$ une fonction définie sur $D$, et $a$ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, tel que tout voisinage de $a$ contienne des points de $D$ autres que $a$ (par exemple, $a$ est un point ou une borne d'un intervalle non réduit à un point contenu dans $D$). Soit $\ell$ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On dit que $f(x)$ *tend vers* $\ell$ quand $x$ *tend vers* $a$, et on écrit $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, si, pour tout voisinage $V$ de $\ell$, il existe un voisinage $W$ de $a$ tel que $f(x) \in V$ pour tout $x \in W \cap D$, $x \neq a$. Par exemple :

(i) $a$ et $\ell$ réels : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D :\ x \in ]a-\delta, a+\delta[ \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ ;

(ii) $a = +\infty$, $\ell$ réel : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K,\ \forall x \in D :\ x > K \Rightarrow f(x) \in ]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ ;

(iii) $a$ réel, $\ell = +\infty$ : $\forall M,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D :\ x \in ]a-\delta, a+\delta[ \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > M$ ;

(iv) $a = +\infty$, $\ell = +\infty$ : $\forall M,\ \exists K,\ \forall x \in D :\ x > K \Rightarrow f(x) > M$.

Pour $a = -\infty$, on remplace $x > K$ par $x < K$ ; pour $\ell = -\infty$, on remplace $f(x) > M$ par $f(x) < M$.

**Exemple 2.1 (Trois Limites).**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} (-3x) = -\infty.$$

**Théorème 2.1 (Limites de Référence).** Ce théorème est admis.

(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ; $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ; à droite et à gauche de 0 (Définition 2.3), $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(ii) Pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, et $\lim_{x\to-\infty} x^n$ vaut $+\infty$ si $n$ est pair, $-\infty$ si $n$ est impair.

(iii) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

(iv) Si $f$ est l'une des fonctions continues du Théorème 3.1 du cours 3 (polynômes, fonctions rationnelles, racine carrée, sinus, cosinus...), et si $a$ appartient à un intervalle sur lequel elle est continue, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (Définition 3.1 du cours 3 [2]).

# 2.2 Opérations sur les Limites

On calcule la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée à partir des limites des morceaux, sauf dans les cas de forme indéterminée.

**Théorème 2.2 (Somme et Produit).** Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$, où $a$, $\ell$, $\ell'$ sont des réels ou $\pm\infty$. Ce théorème est admis.

(i) *Somme.* Si $\ell$ et $\ell'$ sont réels, $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \ell + \ell'$. Si l'une des limites est $+\infty$ et l'autre réelle ou $+\infty$, la limite est $+\infty$ ; si l'une est $-\infty$ et l'autre réelle ou $-\infty$, elle est $-\infty$. Le cas $+\infty + (-\infty)$ est une *forme indéterminée*.

(ii) *Produit.* Si $\ell$ et $\ell'$ sont réels, $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \ell\ell'$. Si l'une des limites est infinie et l'autre est infinie ou un réel non nul, la limite du produit est infinie, de signe donné par la règle des signes. Le cas $0 \times \infty$ est une forme indéterminée.

**Exemple 2.2 (Opérations).**

$$\lim_{x\to 2} x\left(x^2+1\right) = 2 \times 5 = 10, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(x^2+1\right) = +\infty \quad \text{(produit de deux limites } +\infty\text{)}.$$

**Théorème 2.3 (Quotient).** Soient $f$ et $g$ comme dans le Théorème 2.2, avec $g(x) \neq 0$ pour $x$ voisin de $a$, $x \neq a$. Ce théorème est admis.

(i) Si $\ell$ et $\ell'$ sont réels et $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$. Si $\ell$ est réel et $\ell'$ infini, la limite est 0. Si $\ell$ est infini et $\ell'$ un réel non nul, la limite est infinie, de signe donné par la règle des signes.

(ii) Si $\ell' = 0$ et $g(x) > 0$ pour $x$ voisin de $a$, $x \neq a$ (on note $g(x) \to 0^+$), ou $g(x) < 0$ (on note $g(x) \to 0^-$), et si $\ell$ est un réel non nul ou est infini, la limite est infinie, de signe donné par la règle des signes : par exemple $\dfrac{-1}{0^+}$ donne $-\infty$.

(iii) Les cas $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées.

**Formes indéterminées :** $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $+\infty + (-\infty)$. Dans ces cas, il faut transformer l'expression pour *lever l'indétermination*. Ces règles valent aussi pour les limites à droite et à gauche (Définition 2.3).

**Exemple 2.3 (Quotient).** $\lim_{x \to 0} \frac{x}{1+x} = \frac{0}{1} = 0.$

# Lever l'Indétermination par Factorisation

**Exemple 2.4 (Factorisation).** On factorise par *le terme de plus haut degré*.

(i) La limite de $\dfrac{x+4}{x+2}$ en $+\infty$ est de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Pour $x > 0$,

$$\frac{x+4}{x+2} = \frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

(ii) De même, pour $x > 0$,

$$\frac{x^2+4}{x^3+2} = \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} = \frac{1+\frac{4}{x^2}}{x\left(1+\frac{2}{x^3}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

car le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $+\infty$ (Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3).

# Lever l'Indétermination par la Forme Conjuguée

**Identité remarquable.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. D'où, pour tous réels $x \geq 0$ et $y \geq 0$,

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = x - y, \qquad \left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right) = x - 1.$$

On dit que $\sqrt{x} + 1$ est la *forme conjuguée* de $\sqrt{x} - 1$.

**Exemple 2.5 (Forme Conjuguée).** La fonction $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ est définie sur $[0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, et sa limite en 1 est de la forme $\frac{0}{0}$. Pour $x \geq 0$, $x \neq 1$ :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} = \sqrt{x}+1,$$

donc $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right) = 2$ (Théorèmes 2.1 (iv) et 2.2).

# Limite d'une Fonction Composée

Étant donné deux fonctions $f$ et $g$, la fonction $x \mapsto g(f(x))$ est appelée *composée* de $f$ par $g$ ; on la note $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

**Théorème 2.4 (Fonction Composée).** Soient $a$, $b$, $c$ des réels ou $\pm\infty$, et $f$, $g$ deux fonctions telles que $g(f(x))$ soit définie pour $x$ voisin de $a$, $x \neq a$. Si

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{et} \qquad \lim_{X \to b} g(X) = c,$$

alors $\lim_{x \to a} g(f(x)) = c$. Quand $b$ est un réel, on suppose de plus que $f(x) \neq b$ pour $x$ voisin de $a$, $x \neq a$, ou que $g$ est continue en $b$ (cours 3 [2]). Ce théorème est admis ; il vaut aussi quand les deux limites en $a$ sont des limites à droite (resp. à gauche) au sens de la Définition 2.3, les hypothèses étant alors requises pour $x > a$ (resp. $x < a$).

**Exemple 2.6 (Une Composée).** $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^3 + 4} = \sqrt{5}$, car $\lim_{x \to 1} \left(x^3 + 4\right) = 5$ et $\lim_{X \to 5} \sqrt{X} = \sqrt{5}$, la racine carrée étant continue en 5 (Théorème 2.1 (iv)).

# 2.3 Théorème des Gendarmes

Une fonction coincée entre deux fonctions de même limite possède, elle aussi, cette limite.

# Limite par Comparaison

**Théorème 2.5 (Gendarmes et Comparaison).** Soient $f$, $g$, $h$ trois fonctions et $a$ un réel ou $\pm\infty$. On suppose les inégalités ci-dessous vraies pour tout $x$ d'un voisinage de $a$ où les fonctions sont définies, $x \neq a$.

(i) *Théorème des gendarmes.* Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

(ii) Si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(iii) Si $f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x\to a} h(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ce théorème est admis ; il vaut aussi pour les limites à droite et à gauche (Définition 2.3).

**Exemple 2.7 (Encadrement).** Si $2 - \dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq 2 + \dfrac{1}{x^2}$ pour tout $x > 0$, alors, comme les deux bornes tendent vers 2 en $+\infty$ (Théorèmes 2.1 et 2.2), $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (point (i)).

# Exemple : $\sin(x)/x$ en $+\infty$

**Exercice.** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.

**Solution.**
**Étape 1 :** pour tout réel $x$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ (cours 11 [3]).
**Étape 2 :** donc, pour $x > 0$, en divisant par $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

**Étape 3 :** $\lim_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ (Théorème 2.1 (i)). Par le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 (i)),

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

# 2.4 Limites à Droite et à Gauche

On peut s'approcher de $a$ par la droite ou par la gauche, et obtenir deux limites différentes.

# Limites à Droite et à Gauche

**Définition 2.3 (Limites à Droite et à Gauche).** Soit $f$ une fonction définie sur $D$, $a$ un réel et $\ell$ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. On suppose, comme dans la Définition 2.2, que $D$ contient des points aussi proches de $a$ qu'on veut, à droite (resp. à gauche) de $a$.

(i) On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $a$ *à droite*, et on écrit $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$, si, pour tout voisinage $V$ de $\ell$, il existe un voisinage $W$ de $a$ tel que $f(x) \in V$ pour tout $x \in W \cap D$ tel que $x > a$.

(ii) On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ quand $x$ tend vers $a$ *à gauche*, et on écrit $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$, si, pour tout voisinage $V$ de $\ell$, il existe un voisinage $W$ de $a$ tel que $f(x) \in V$ pour tout $x \in W \cap D$ tel que $x < a$.

**Théorème 2.6 (Limite et Limites à Droite et à Gauche).** Soient $a$ un réel, $\ell$ un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, et $f$ une fonction définie à droite et à gauche de $a$, au voisinage de $a$ (sauf peut-être en $a$). Alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$. En particulier, si les limites à droite et à gauche sont différentes, $f$ n'a pas de limite en $a$. Ce théorème est admis.

# Exemple : la Fonction Inverse en 0

**Exemple 2.8 (La Fonction $1/x$ en $0$).** Par le Théorème 2.1 (i),

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes, donc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas (Théorème 2.6).

Par la règle des signes du Théorème 2.3 (ii), on en déduit par exemple $\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} = -\infty$ : le numérateur tend vers $3 > 0$, et $x$ tend vers 0 en restant positif (resp. négatif).

# 2.5 Asymptotes

Une limite infinie, ou une limite en l'infini, se voit sur la courbe : celle-ci se rapproche d'une droite.

# Asymptotes Horizontale et Verticale

Notons $\mathcal{C}_f$ la courbe de $f$.

**Définition 2.4 (Asymptote Horizontale).** Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une *asymptote horizontale* d'équation $y = \ell$. De même en $-\infty$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

**Définition 2.5 (Asymptote Verticale).** Soit $a$ un réel. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *asymptote verticale* d'équation $x = a$. C'est aussi le cas si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to a^-} f(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

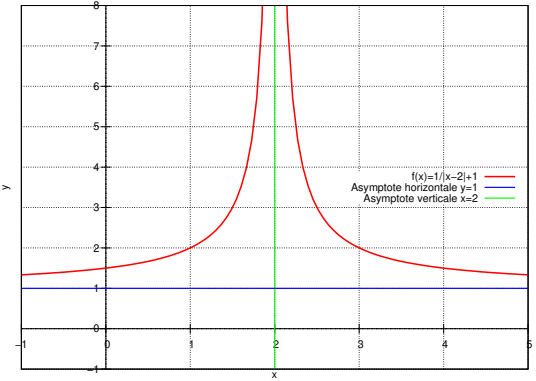
# Exemple : Asymptotes Horizontale et Verticale

**Exemple 2.9 (Asymptotes).** Soit $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 1$, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

(i) Pour $x > 2$, $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$, et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ (Théorème 2.3 (i)), donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ : $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ ; de même en $-\infty$, car $f(x) = \dfrac{1}{2-x} + 1$ pour $x < 2$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2-x} = 0$.

(ii) Quand $x$ tend vers 2, $|x-2|$ tend vers 0 (Définition 2.2 (i), avec $\delta = \varepsilon$) en restant positif, donc $\lim_{x\to2} \dfrac{1}{|x-2|} = +\infty$ (Théorème 2.3 (ii)) et $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$ : $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

# Asymptotes Horizontale et Verticale : la Courbe




Courbe de $f(x) = \dfrac{1}{|x-2|} + 1$ (Exemple 2.9), avec son asymptote horizontale $y = 1$ et son asymptote verticale $x = 2$.

# Asymptote Oblique

**Définition 2.6 (Asymptote Oblique).** Soient $a \neq 0$ et $b$ deux réels. Si

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

on dit que $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une *asymptote oblique* d'équation $y = ax + b$. De même en $-\infty$, avec $\lim_{x \to -\infty}$. (Si $a = 0$, c'est une asymptote horizontale.)

**Exemple 2.10 (Asymptote Oblique).** Soit $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $x \neq 0$,

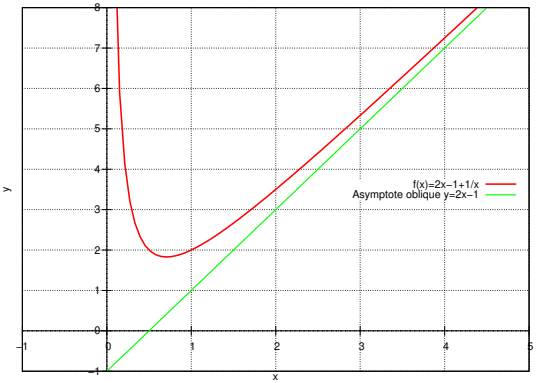
$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{x(2x-1)}{x} + \frac{1}{x} = 2x - 1 + \frac{1}{x},$$

donc

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ ; de même en $-\infty$, car $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

# Asymptote Oblique : la Courbe




Courbe de $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ (Exemple 2.10), avec son asymptote oblique $y = 2x - 1$.

# À retenir

On retient la définition, les règles de calcul, les deux façons de lever une indétermination, et les trois sortes d'asymptotes.

# À retenir

**Ce que cette leçon a établi.**

- Définition : voisinages, limite finie ou infinie en un réel ou en l'infini (Définitions 2.1 et 2.2) ; limites de référence (Théorème 2.1).
- Calcul : somme, produit, quotient (Théorèmes 2.2 et 2.3), sauf les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $+\infty + (-\infty)$, que l'on lève par factorisation par le terme de plus haut degré ou par la forme conjuguée (Exemples 2.4 et 2.5) ; fonction composée (Théorème 2.4).
- Encadrement : théorème des gendarmes et comparaison (Théorème 2.5).
- Limites à droite et à gauche : la limite existe si et seulement si elles existent et sont égales (Définition 2.3, Théorème 2.6).
- Asymptotes : horizontale $y = \ell$, verticale $x = a$, oblique $y = ax + b$ (Définitions 2.4 à 2.6).

**La suite :** le cours 3 [2], la continuité.

Merci pour votre attention.

# Références


[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.