Cours 3

Fonction Continue, Continuité

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

9 novembre 2026

Plan

Introduction

3.1 Définition de la Continuité

3.2 Opérations sur la Continuité

3.3 Théorème des Valeurs Intermédiaires

3.4 Prolongement par Continuité

À retenir

Introduction

Une fonction continue est une fonction dont on trace la courbe sans lever le crayon. Cette leçon en donne la définition, les règles de calcul, et le théorème qui en fait un outil : le théorème des valeurs intermédiaires.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** la limite d'une fonction en un point, les limites à droite et à gauche, les opérations sur les limites (cours 2 [1]).
- **Les objets :** la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle ; les fonctions de référence continues ; le théorème des valeurs intermédiaires ; le prolongement par continuité.
- **Ce qu'on saura faire :** justifier qu'une fonction est continue, montrer qu'une équation $f(x) = k$ a une solution, et une seule quand f est strictement monotone, prolonger une fonction par continuité en un point.
- **Et ensuite :** le cours 4 [2], la fonction dérivée.

3.1 Définition de la Continuité

L'intuition du crayon qu'on ne lève pas se traduit par une égalité entre une limite et une valeur.

Continuité en un Point, sur un Intervalle

Intuition. Une fonction f est continue sur un intervalle si l'on peut tracer sa courbe sur cet intervalle sans lever le crayon.

Définition 3.1 (Continuité en un Point). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Définition 3.2 (Continuité sur un Intervalle). Une fonction f définie sur un intervalle I est *continue sur I* si elle est continue en tout point de I. De même, f est continue sur une réunion d'intervalles (par exemple $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) si elle est continue en tout point de celle-ci.

Exemple : une Fonction Définie par Morceaux

Exemple 3.1 (Fonction Définie par Morceaux). Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{pour } x < 2, \\ x + 1, & \text{pour } x > 2. \end{cases}$$

Étape 1 : limites à gauche et à droite de 2 (cours 2 [1]) :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 \times 2 - 1 = 3, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 + 1 = 3.$$

Étape 2 : les deux limites sont égales, donc $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.
Étape 3 : f n'est pas définie en 2. Si l'on pose $f(2) = 3$, la fonction ainsi définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$: elle est continue en 2 (Définition 3.1). Toute autre valeur de $f(2)$ la rendrait discontinue en 2.

Théorème 3.1 (Fonctions de Référence).

(i) Les fonctions polynômes, comme x, x^2, $3x^4 - 2x + 7$, sont continues sur $\mathbb{R}$.

(ii) Les fonctions rationnelles (quotients de deux polynômes) sont continues sur chaque intervalle où leur dénominateur ne s'annule pas ; en particulier $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(iii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

(iv) Les fonctions ln (sur $]0, +\infty[$), exp, sin et cos (sur $\mathbb{R}$) sont continues ; elles sont étudiées dans les cours 5, 6 et 11 [3, 4, 5].

Ces résultats sont admis.

3.2 Opérations sur la Continuité

Somme, produit, quotient, composée : les règles de calcul des limites se transmettent à la continuité.

Théorème 3.2 (Somme, Produit, Quotient). Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I contenant a, et continues en a.

(i) La somme $f+g$ et le produit $f \times g$ sont continus en a.

(ii) Si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est continu en a.

Théorème 3.3 (Composition). Soit f définie sur un intervalle I contenant a, et g définie sur un intervalle J contenant $f(x)$ pour tout $x \in I$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$, définie par $g \circ f(x) = g(f(x))$, est continue en a.

Ces deux théorèmes sont admis ; appliqués en chaque point d'un intervalle, ils donnent la continuité sur cet intervalle (Définition 3.2).

Exemple : une Composée

Exemple 3.2 (Une Composée). Montrons que $h(x) = \sqrt{x^3 + 4}$ est continue en 1.
Étape 1 : $h = g \circ f$ avec $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Étape 2 : f est un polynôme, donc elle est continue en 1 (Théorème 3.1 (i)).
Étape 3 : on se place sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, qui contient 1 (sur $\mathbb{R}$ tout entier, $x^3 + 4$ est négatif pour $x < -\sqrt[3]{4}$, où g n'est pas définie). Pour tout $x \in I$, $f(x) = x^3 + 4 \geq 4$, donc $f(x)$ appartient à $J = [0, +\infty[$, sur lequel g est définie ; et g est continue en $f(1) = 5$ (Théorème 3.1 (iii)). Comme 1 est intérieur à I, la continuité en 1 ne dépend que des valeurs près de 1 (cours 2 [1]).
Étape 4 : par le Théorème 3.3, $h = g \circ f$ est continue en 1.

3.3 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Une fonction continue sur un intervalle ne saute aucune valeur : c'est ce qui permet de prouver qu'une équation a une solution sans la calculer.

Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 3.4 (Valeurs Intermédiaires). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

(i) Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

(ii) Si de plus f est strictement monotone (croissante ou décroissante) sur $[a, b]$, ce réel c est unique.

Corollaire 3.1 (Changement de Signe). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires :

$$\begin{cases} f(a) f(b) < 0, \\ f \text{ continue sur } [a, b], \end{cases} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$, ce réel c est unique. Ces résultats sont admis.

Lire le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Lecture du théorème.

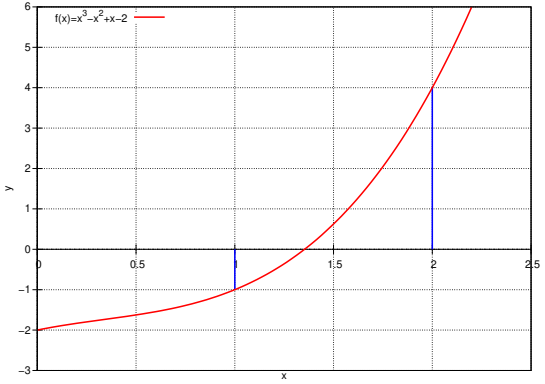
- Le théorème garantit l'existence de c, il ne le calcule pas.
- Sans la monotonie stricte, il peut y avoir plusieurs solutions ; le point (ii) donne l'unicité.
- Le Corollaire 3.1 est le cas $k = 0$: comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est compris entre eux ; et $c \neq a$, $c \neq b$ puisque $f(a)f(b) \neq 0$.

Remarque 3.1 (Intervalle Quelconque). Soit f continue sur un intervalle d'extrémités $a < b$, ouvert ou semi-ouvert, où a peut valoir $-\infty$ et b peut valoir $+\infty$. Si f admet des limites ℓ_a en a et ℓ_b en b, finies ou infinies, alors pour tout réel k strictement compris entre ℓ_a et ℓ_b, il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$; si de plus f est strictement monotone, ce réel c est unique. Ce résultat est admis.

Exemple : une Équation du Troisième Degré

Exemple 3.3 (Une Équation du Troisième Degré). Soit $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution c dans $[1, 2]$.
Étape 1 : f est un polynôme, donc elle est continue sur $[1, 2]$ (Théorème 3.1 (i)).
Étape 2 : $f(1) = 1 - 1 + 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 - 4 + 2 - 2 = 4 > 0$. Par le Corollaire 3.1, il existe au moins un $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$.
Étape 3 : $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ a pour discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = -8 < 0$; le coefficient de x^2 étant positif, $f'(x) > 0$ pour tout x. Donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$ (variations à partir du signe de f', cours 4 [2]).
Étape 4 : par le Corollaire 3.1 (unicité, cas strictement monotone), c est unique.

Exemple : la Courbe



Courbe de $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ (Exemple 3.3) : $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 4 > 0$; la courbe coupe l'axe des abscisses une seule fois entre 1 et 2, en $c \approx 1{,}35$.

3.4 Prolongement par Continuité

Quand une fonction n'est pas définie en un point mais y a une limite finie,
on peut combler le trou.

Prolongement par Continuité

Définition 3.3 (Prolongement par Continuité). Soit I un intervalle, $a \in I$, et f une fonction définie et continue sur $I \setminus \{a\}$, telle que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

La fonction g définie sur I par

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a, \\ \ell, & \text{si } x = a, \end{cases}$$

est continue en a, car g coïncide avec f sur $I \setminus \{a\}$, donc $\lim_{x \to a} g(x) = \ell = g(a)$ (cours 2 [1] et Définition 3.1) ; elle est appelée *prolongement par continuité* de f en a.

Remarque 3.2 (Limite Non Finie). Si f n'admet pas de limite finie en a, elle n'est pas prolongeable par continuité en a : une fonction $\tilde{g}$ définie sur I, égale à f sur $I \setminus \{a\}$ et continue en a, vérifierait $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \tilde{g}(x) = \tilde{g}(a) \in \mathbb{R}$ (cours 2 [1] et Définition 3.1).

Exemple : Lever une Indétermination

Exemple 3.4 (Lever une Indétermination). Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$, définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, car $x^2+1>0$ et son dénominateur $\sqrt{x^2+1}-1$ ne s'annule qu'en 0 (Théorèmes 3.1 à 3.3).

Étape 1 : pour $x \neq 0$, on multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+1}+1 \geq 2$, non nulle :

$$f(x) = \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{(x^2+1)-1} = \frac{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2} = \sqrt{x^2+1}+1.$$

Étape 2 : comme $x^2+1 \geq 1 > 0$ pour tout x, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}+1$ est continue en 0 (Théorèmes 3.1 à 3.3) ; comme f coïncide avec elle pour $x \neq 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{0+1}+1 = 2$ (cours 2 [1]).

Étape 3 : le prolongement par continuité de f en 0 est (Définition 3.3)

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq 0, \\ 2, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

À retenir

On retient une limite égale à une valeur, des règles de calcul et un théorème d'existence.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Continuité en a : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (Définition 3.1) ; sur un intervalle : en tout point (Définition 3.2).
- Polynômes, fonctions rationnelles (là où le dénominateur ne s'annule pas), racine carrée, ln, exp, sin, cos : continus sur leurs intervalles de définition (Théorème 3.1, admis).
- Somme, produit, quotient (dénominateur non nul), composée de fonctions continues : continus (Théorèmes 3.2 et 3.3).
- Valeurs intermédiaires (Théorème 3.4, Corollaire 3.1) : f continue sur $[a, b]$ et k entre $f(a)$ et $f(b)$ $\Rightarrow$ au moins un $c \in [a, b]$ avec $f(c) = k$; unique si f est strictement monotone. Sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert (extrémités éventuellement infinies) : k strictement entre les limites (Remarque 3.1).
- Prolongement par continuité en a : pour f définie et continue sur $I \backslash \{a\}$, possible si et seulement si f a une limite finie ℓ en a ; on pose $g(a) = \ell$ (Définition 3.3, Remarque 3.2).

La suite : le cours 4 [2], la fonction dérivée.

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.