Cours 4

Fonction Dérivée, Dérivation

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

12 novembre 2026

Plan

Introduction

4.1 Nombre Dérivé et Fonction Dérivée

4.2 Dérivabilité et Continuité

4.3 Calcul des Dérivées
- Dérivées de Référence
- Somme, Produit et Quotient
- Fonction Composée

4.4 Sens de Variation

4.5 Tangente à une Courbe

4.6 Dérivée et Calcul de Limites

À retenir

Introduction

Comment mesurer la pente d'une courbe en un point ? Cette leçon définit le nombre dérivé comme limite d'un taux de variation, donne les règles pour calculer une dérivée, et en tire le sens de variation d'une fonction et l'équation d'une tangente.

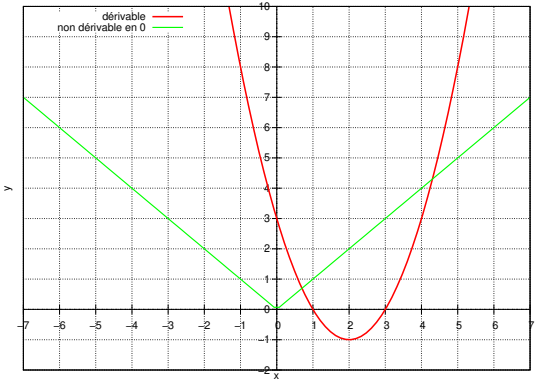
Où se place cette leçon

- **Prérequis :** la limite d'une fonction et les opérations sur les limites (cours 2 [1]) ; la continuité (cours 3 [2]) ; l'équation d'une droite et sa pente.
- **Les objets :** le taux de variation, le nombre dérivé et la fonction dérivée ; le lien entre dérivabilité et continuité ; les dérivées de référence, les dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composée ; le sens de variation ; la tangente à une courbe.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer une dérivée, dresser un tableau de variation, trouver un minimum ou un maximum, écrire l'équation d'une tangente, reconnaître un taux de variation pour calculer une limite.
- **Et ensuite :** les dérivées des fonctions logarithme, exponentielle, sinus et cosinus, énoncées dès cette leçon (Théorème 4.2), sont étudiées dans les cours 5, 6 et 11 [3, 4, 5].

4.1 Nombre Dérivé et Fonction Dérivée

La pente de la courbe en un point est la limite des pentes des cordes qui le joignent aux points voisins.

Intuition : deux Courbes



La courbe de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ se trace de manière lisse, sans changer brutalement de direction : f est dérivable en tout point. La courbe de $x \mapsto |x|$ fait un angle en 0 : la fonction n'y est pas dérivable (Exemple 4.2).

Nombre Dérivé : la Définition

Définition 4.1 (Nombre Dérivé). Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point, et $a \in I$.

(i) Pour $x \in I$, $x \neq a$, le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est appelé *taux de variation* de f entre a et x : c'est la pente de la droite qui joint les points de la courbe d'abscisses a et x.

(ii) On dit que f est *dérivable* en a si ce taux de variation a une limite *finie* quand x tend vers a (Définition 2.2 du cours 2 [1]). Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a, et notée

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition 4.2 (Fonction Dérivée). Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point. On dit que f est *dérivable sur* I si elle est dérivable en tout point de I. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$, définie sur I, est alors appelée *fonction dérivée* de f.

Exemple 4.1 (La Fonction Carré). Soit $f(x) = x^2$, définie sur $\mathbb{R}$, et a un réel.
Étape 1 : pour $x \neq a$, le taux de variation vaut

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a.$$

Étape 2 : $\lim_{x \to a}(x + a) = 2a$, limite finie. Donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$ (Définition 4.1).
Étape 3 : c'est vrai pour tout réel a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 2x$ (Définition 4.2).

4.2 Dérivabilité et Continuité

Une fonction dérivable est continue ; la réciproque est fausse.

Une Fonction Dérivable est Continue

Théorème 4.1 (Dérivable implique Continue). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve. Pour $x \in I$, $x \neq a$,

$$f(x) - f(a) = (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quand x tend vers a, le premier facteur tend vers 0 et le second vers le réel $f'(a)$ (Définition 4.1). Le produit tend donc vers $0 \times f'(a) = 0$ (Théorème 2.2 (ii) du cours 2 [1]). Ainsi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$: f est continue en a (Définition 3.1 du cours 3 [2]).

Une Fonction Continue n'est pas toujours Dérivable

Exemple 4.2 (La Valeur Absolue en 0). La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais elle n'y est pas dérivable.

Étape 1 : $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = -x$ pour $x \leq 0$, donc $f(x)$ tend vers $0 = f(0)$ à droite et à gauche de 0 ; ainsi $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ (Théorème 2.6 du cours 2 [1]) : f est continue en 0 (Définition 3.1 du cours 3 [2]).

Étape 2 : pour $x \neq 0$, le taux de variation entre 0 et x vaut $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$.

Étape 3 : il vaut $\dfrac{x}{x} = 1$ pour $x > 0$ et $\dfrac{-x}{x} = -1$ pour $x < 0$, donc

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Étape 4 : les limites à droite et à gauche sont différentes, donc le taux de variation n'a pas de limite en 0 (Théorème 2.6 du cours 2 [1]) : f n'est pas dérivable en 0. Sur la courbe, cela se voit par un angle (première figure).

4.3 Calcul des Dérivées

On calcule une dérivée à partir de quelques dérivées de référence et de règles pour les sommes, produits, quotients et composées.

Dérivées de Référence

Théorème 4.2 (Dérivées de Référence). Ce théorème est admis.

$f(x)$	k (constante)	x	x^n ($n \geq 1$ entier)	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$

De plus, sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$; exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\exp' = \exp$; ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Ces fonctions sont étudiées dans les cours 5, 6 et 11 [3, 4, 5] ; $\exp' = \exp$ est démontré (Théorème 6.4 du cours 6).

La racine carrée n'est pas dérivable en 0 : pour $x > 0$, son taux de variation entre 0 et x vaut $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, car $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant positif (Théorèmes 2.1, 2.3 (ii) et 2.4 du cours 2 [1]).

Théorème 4.3 (Somme, Produit, Quotient). Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, dérivables en $a \in I$, et c un réel. Ce théorème est admis.

(i) cf et $f+g$ sont dérivables en a, et $(cf)'(a) = cf'(a)$, $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) fg est dérivable en a, et $(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$.

(iii) Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en a, et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}.$$

(iv) En particulier, si f et g sont dérivables sur I, on a sur I : $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ si g ne s'annule pas sur I. Avec le Théorème 4.2, les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et les fonctions rationnelles sur tout intervalle où leur dénominateur ne s'annule pas.

Exemple : un Quotient

Exemple 4.3 (Un Quotient). Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Étape 1 : le numérateur x et le dénominateur x^2+1 sont des polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées 1 et $2x$ (Théorèmes 4.2 et 4.3) ; le dénominateur ne s'annule pas, car $x^2+1 \geq 1$.
Étape 2 : donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème 4.3 (iv)), et

$$f'(x) = \frac{1 \times \left(x^2+1\right) - x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Remarque 4.1 (Un Procédé pour Retrouver les Formules). Pour $x > 0$, on écrit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, et on applique la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ comme si l'exposant était un entier $n \geq 1$:

$$\left(x^{-1}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Les puissances d'exposant non entier ne sont pas définies dans ce cours : ce procédé sert à *retrouver* une formule, il ne la démontre pas. Les deux premières formules sont celles du Théorème 4.2 ; la troisième se démontre par le Théorème 4.3 (iii) : pour $x > 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Dérivée d'une Fonction Composée

Théorème 4.4 (Fonction Composée). Soient u une fonction définie sur un intervalle I et v une fonction définie sur un intervalle J, telles que $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$. Soit $a \in I$. Si u est dérivable en a et v est dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u : x \mapsto v(u(x))$ est dérivable en a, et

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a)).$$

Ce théorème est admis.

Corollaire 4.1 (Composées Usuelles). Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et $n \geq 1$ un entier. Par les Théorèmes 4.2 et 4.4 (pour $\frac{1}{u}$, directement par le Théorème 4.3 (iii)) :

$f(x)$	$u(x)^2$	$u(x)^n$	$\frac{1}{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$
$f'(x)$	$2u(x)\,u'(x)$	$nu(x)^{n-1}\,u'(x)$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
condition sur I	aucune	aucune	u ne s'annule pas	$u > 0$

Exemple : une Composée

Exemple 4.4 (Une Composée). Calculons la dérivée de $h(x) = \sqrt{x^3+4}$, définie pour $x^3+4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -\sqrt[3]{4}$.

Étape 1 : $u(x) = x^3+4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $u'(x) = 3x^2$ (Théorèmes 4.2 et 4.3).

Étape 2 : $v(X) = \sqrt{X}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $v'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$ (Théorème 4.2).

Étape 3 : sur $I = \left]-\sqrt[3]{4}, +\infty\right[$, on a $u(x) > 0$. Donc $h = v \circ u$ est dérivable sur I (Théorème 4.4), et

$$h'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}.$$

4.4 Sens de Variation

Le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction.

Théorème 4.5 (Sens de Variation). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable en tout point de I qui n'en est pas une borne. Ce théorème est admis.

(i) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I qui n'en est pas une borne, alors f est croissante sur I ; si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I.

(ii) Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I. C'est le cas si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) en tout point de I qui n'en est pas une borne.

(iii) Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I qui n'en est pas une borne, alors f est constante sur I.

Lire le théorème. Une fonction dérivable sur I est continue sur I (Théorème 4.1) : il suffit alors de regarder le signe de f'. La continuité permet d'inclure dans I une borne où f n'est pas dérivable, comme 0 pour la racine carrée. L'intervalle compte : $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ a une dérivée $\dfrac{1}{x^2} > 0$, et cette fonction est croissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, mais pas sur leur réunion : elle vaut 1 en -1 et -1 en 1.

Exemple : un Tableau de Variation

Exemple 4.5 (Tableau de Variation). Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$, dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x - 4$ (Théorèmes 4.2 et 4.3).
Étape 1 : $f'(x) < 0$ pour $x < 2$, $f'(2) = 0$, $f'(x) > 0$ pour $x > 2$. Par le Théorème 4.5 (ii), f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$, avec $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

Étape 2 : pour $x \leq 2$, $f(x) \geq f(2)$ car f est décroissante sur $]-\infty, 2]$; pour $x \geq 2$, $f(x) \geq f(2)$ car f est croissante sur $[2, +\infty[$. Donc f admet un *minimum* en 2 :

$$f(x) \geq f(2) = -1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Vérification directe : $f(x) + 1 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$.

4.5 Tangente à une Courbe

La tangente en un point est la droite qui passe par ce point avec la pente donnée par le nombre dérivé.

Équation de la Tangente

Définition 4.3 (Tangente). Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en $a \in I$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe. La *tangente* à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite qui passe par le point $(a, f(a))$ et a pour pente $f'(a)$. Son équation est

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Lire la définition.

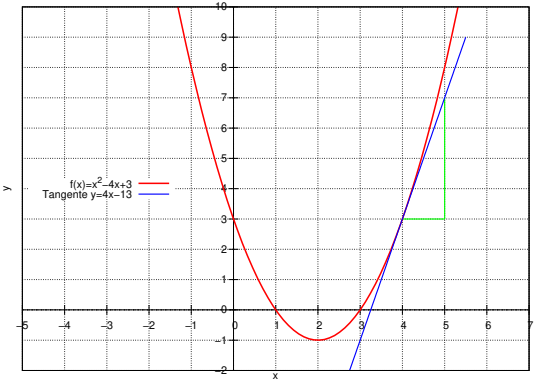
- Pour $x = a$, on obtient $y = f(a)$: la tangente passe bien par le point $(a, f(a))$ de la courbe.
- La pente d'une droite $D : y = px + q$ est p : quand l'abscisse x augmente de 1, l'ordonnée y augmente de p. La pente de la tangente est $f'(a)$; on commence donc par écrire $T : y = f'(a)(x - \ldots) + \ldots$
- Une tangente est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.

Exemple : une Tangente

Exemple 4.6 (Une Tangente). Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$, de dérivée $f'(x) = 2x - 4$ (Exemple 4.5).
Étape 1 : $f(4) = 16 - 16 + 3 = 3$ et $f'(4) = 8 - 4 = 4$.
Étape 2 : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 a pour équation (Définition 4.3)

$$T : y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 4(x - 4) + 3 = 4x - 13.$$

Une Tangente : la Courbe



Courbe de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ et sa tangente $y = 4x - 13$ au point $(4, 3)$ (Exemple 4.6). Le triangle vert montre la pente : quand x augmente de 1, l'ordonnée sur la tangente augmente de 4.

4.6 Dérivée et Calcul de Limites

Reconnaître un taux de variation permet de lever certaines formes indéterminées $\frac{0}{0}$.

Reconnaître un Taux de Variation

Si f est dérivable en a, alors, par la Définition 4.1,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Exemple 4.7 (Une Limite). Calculons $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, forme indéterminée $\frac{0}{0}$ (Théorème 2.3 (iii) du cours 2 [1]).

Étape 1 : soit $f(x) = x^3$. Alors $f(1) = 1$, et pour $x \neq 1$,

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

est le taux de variation de f entre 1 et x.

Étape 2 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 3x^2$ (Théorème 4.2). Donc

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = f'(1) = 3.$$

À retenir

On retient la définition du nombre dérivé, les règles de calcul, le lien entre le signe de la dérivée et les variations, et l'équation de la tangente.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Définition : le nombre dérivé $f'(a)$ est la limite finie du taux de variation $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (Définitions 4.1 et 4.2).
- Une fonction dérivable est continue ; la valeur absolue est continue mais n'est pas dérivable en 0 (Théorème 4.1, Exemple 4.2).
- Calcul : dérivées de référence, de cf, $f+g$, fg, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$ et d'une composée, avec leurs conditions (Théorèmes 4.2 à 4.4, Corollaire 4.1).
- Variations : pour f continue sur un intervalle et dérivable en ses points intérieurs, $f' \geq 0$ donne f croissante, et $f' \geq 0$ ne s'annulant qu'en un nombre fini de points donne f strictement croissante ; de même pour la décroissance (Théorème 4.5).
- Tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ (Définition 4.3).

La suite : les cours 5 et 6 [3, 4], les fonctions logarithme et exponentielle, étudiées à l'aide de leurs dérivées.

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.