Cours 5

Fonction Logarithme

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

11 novembre 2026

Plan

Introduction

5.1 Définition et Sens de Variation

5.2 Propriétés Algébriques

5.3 Dérivée de $\ln u$

5.4 Limites

5.5 Équations, Inéquations et Nombre e

5.6 Logarithme en Base b

À retenir

Introduction

Quelle fonction transforme un produit en somme ? Cette leçon définit le logarithme népérien par sa dérivée $\frac{1}{x}$, en tire ses propriétés algébriques, ses limites et le nombre e, et l'applique à la résolution d'équations et d'inéquations.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les limites et leurs opérations (cours 2 [2]) ; la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires (cours 3 [3]) ; la dérivée d'une composée et le lien entre signe de la dérivée et sens de variation (cours 4 [4]).
- **Les objets :** la fonction logarithme népérien, ses variations et son signe ; le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance ; la dérivée de $\ln u$; les limites et les croissances comparées ; le nombre e ; le logarithme en base b.
- **Ce qu'on saura faire :** simplifier une expression, calculer une dérivée, lever une forme indéterminée, résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes en commençant par son domaine.
- **Et ensuite :** la fonction exponentielle, réciproque du logarithme (cours 6 [5]) ; le logarithme comme primitive de $\frac{1}{x}$ (cours 9 [6]).

5.1 Définition et Sens de Variation

Le logarithme est la fonction qui vaut 0 en 1 et dont la dérivée est $\frac{1}{x}$; il est strictement croissant.

On note $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Définition 5.1 (Logarithme Népérien). On admet qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Cette fonction est appelée *logarithme népérien* et notée ln. Ainsi $\ln(1) = 0$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

Lire la définition. Le logarithme n'est défini que pour $x > 0$: $\ln(0)$ et $\ln(-2)$ n'ont pas de sens. Étant dérivable, ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (Théorème 4.1 du cours 4 [4]). L'existence de ln se démontre à l'aide des intégrales (cours 9 [6]).

Théorème 5.1 (Sens de Variation et Signe).

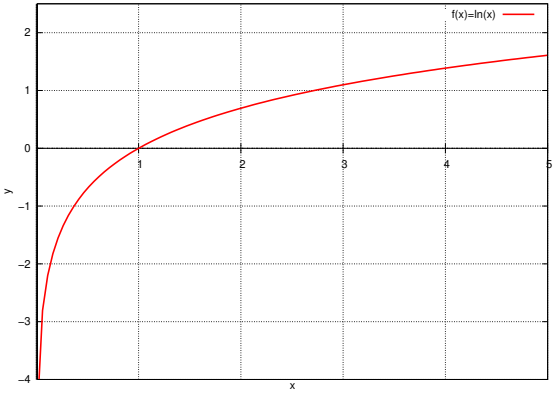
(i) La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Pour tous $x, y > 0$: $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$, et $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.

(iii) $\ln(x) < 0$ pour $0 < x < 1$, $\ln(1) = 0$, et $\ln(x) > 0$ pour $x > 1$.

Preuve. (i) $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ (Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [4]). (ii) Si $x < y$, alors $\ln(x) < \ln(y)$ par (i) ; de même si $y < x$. Donc $\ln(x) = \ln(y)$ impose $x = y$, et $\ln(x) < \ln(y)$ impose $x < y$. (iii) On applique (ii) avec $y = 1$, car $\ln(1) = 0$.

Courbe de la Fonction Logarithme



La courbe passe par le point $(1, 0)$, est située sous l'axe des abscisses pour $0 < x < 1$ et au-dessus pour $x > 1$ (Théorème 5.1). Elle s'approche de l'axe des ordonnées quand x tend vers 0 et monte sans borne (Théorème 5.4), de plus en plus lentement, car sa pente $\frac{1}{x}$ diminue (Définition 5.1).

5.2 Propriétés Algébriques

Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes ; on en déduit le logarithme d'un quotient et d'une puissance.

Théorème 5.2 (Propriétés Algébriques). Pour tous $x, y > 0$ et tout entier relatif n :

(i) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;

(ii) $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$ et $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;

(iii) $\ln(x^n) = n\ln(x)$;

(iv) $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Preuve du Théorème 5.2

Preuve. (i) Fixons $y > 0$ et posons $g(x) = \ln(xy) - \ln(x)$ pour $x > 0$. Comme $xy > 0$, par le Théorème 4.4 du cours 4, $g'(x) = \dfrac{y}{xy} - \dfrac{1}{x} = 0$; g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [4]), égale à $g(1) = \ln(y)$.

(ii) Par (i), $\ln(y) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln(1) = 0$, puis $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

(iii) Pour $n \geq 0$, par récurrence sur n avec (i) (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) ; pour $n < 0$, on écrit $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$ et on applique (ii).

(iv) Par (iii), avec $\sqrt{x} > 0$, $2\ln\left(\sqrt{x}\right) = \ln\left(\sqrt{x}^2\right) = \ln(x)$.

Lire le Théorème et Exemple

Lire le théorème. Chaque égalité suppose $x > 0$ et $y > 0$. Si x est seulement non nul, $x^2 = |x|^2$ avec $|x| > 0$, donc $\ln\left(x^2\right) = 2\ln\left(|x|\right)$, et non $2\ln(x)$, qui n'a pas de sens pour $x < 0$. Les puissances d'exposant réel quelconque sont définies dans le cours 6 [5].

Exemple 5.1 (Simplifications). Par le Théorème 5.2,

$$\ln(12) - \ln(3) = \ln\left(\frac{12}{3}\right) = \ln(4) = \ln\left(2^2\right) = 2\ln(2),$$

$$\ln\left(\frac{1}{8}\right) = -\ln\left(2^3\right) = -3\ln(2), \qquad \ln\left(\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\ln(6) = \frac{1}{2}\left(\ln(2) + \ln(3)\right).$$

5.3 Dérivée de $\ln u$

La dérivée de $\ln u$ est $\dfrac{u'}{u}$, là où u est dérivable et strictement positive.

Théorème 5.3 (Dérivée de $\ln u$). Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Preuve. Théorème 4.4 du cours 4 [4], avec $v = \ln$, dérivable sur $J = \mathbb{R}_+^*$, qui contient $u(x)$ pour tout $x \in I$: $(\ln \circ u)'(x) = \ln'(u(x))\, u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple 5.2 (Fonction Affine). Soient $a \neq 0$ et b deux réels. Sur tout intervalle où $ax + b > 0$,

$$(\ln(ax + b))' = \frac{a}{ax + b}.$$

Exemple : une Étude de Variation

Exemple 5.3 (Variations de $\ln\left(x^2+1\right)$). Soit $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$.
Étape 1 : $u(x)=x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x)\geq 1>0$. Par le Théorème 5.3, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue (Théorème 4.1 du cours 4 [4]), et

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}.$$

Étape 2 : $f'(x)$ a le signe de x, car $x^2+1>0$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [4], f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$; son minimum est $f(0)=\ln(1)=0$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

5.4 Limites

Le logarithme tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$, mais moins vite que toute puissance x^n, $n \geq 1$.

Théorème 5.4 (Limites aux Bornes). Ce théorème est admis.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

En particulier, l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est asymptote verticale à la courbe de ln (Définition 2.5 du cours 2 [2]).

Théorème 5.5 (Croissances Comparées). Pour tout entier $n \geq 1$ (ce théorème est admis) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

On dit que x^n *l'emporte* sur $\ln(x)$.

Remarque 5.1 (Puissances Réelles). Ces deux limites restent vraies pour x^p, où p est un réel strictement positif, une fois les puissances réelles définies (cours 6 [5]). Pour $p = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire pour $\sqrt{x}$, on peut aussi se ramener au Théorème 5.5 en posant $y = \sqrt{x}$.

Exemple : une Forme Indéterminée

Exemple 5.4 (Factorisation). Calculons $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\ln(x)}{x^2-1}$, forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Étape 1 : pour $x > 1$, on factorise par x^2 :

$$\frac{x^2+\ln(x)}{x^2-1} = \frac{x^2\left(1+\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{1+\dfrac{\ln(x)}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}.$$

Étape 2 : $\dfrac{\ln(x)}{x^2} \to 0$ (Théorème 5.5 avec $n=2$) et $\dfrac{1}{x^2} \to 0$, donc, par les Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [2],

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\ln(x)}{x^2-1} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Exemple : un Taux de Variation

Exemple 5.5 (Limite en 1). Calculons $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1}$, forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Étape 1 : soit $f = \ln$. Comme $f(1) = 0$, pour $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

est le taux de variation de f entre 1 et x.

Étape 2 : f est dérivable en 1, et $f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ (Définition 5.1). Par la Définition 4.1 du cours 4 [4],

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = f'(1) = 1.$$

5.5 Équations, Inéquations et Nombre e

Tout réel est le logarithme d'un unique réel strictement positif ; celui dont le logarithme vaut 1 est le nombre e.

Théorème 5.6 (Équation $\ln(x) = k$). Pour tout réel k, l'équation $\ln(x) = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve. La fonction ln est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (Définition 5.1 et Théorème 4.1 du cours 4 [4]), strictement croissante (Théorème 5.1), et ses limites en 0 et en $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$ (Théorème 5.4). Tout réel k est strictement compris entre ces limites : on conclut par la Remarque 3.1 du cours 3 [3].

Définition 5.2 (Nombre e). On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln(e) = 1$ (Théorème 5.6 avec $k = 1$). On a $e \approx 2{,}718$.

Par le Théorème 5.2 (iii), $\ln(e^n) = n \ln(e) = n$ pour tout entier relatif n : par exemple $\ln(e^2) = 2$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$. Comme $\ln(e) = 1 > 0 = \ln(1)$, on a $e > 1$ (Théorème 5.1 (ii)).

Méthode et Exemples

Méthode. Pour résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes : (1) chercher son domaine, où chaque logarithme a un argument strictement positif ; (2) écrire chaque membre comme le logarithme d'un réel strictement positif et appliquer le Théorème 5.1 (ii) ; (3) garder les solutions qui sont dans le domaine.

Exemple 5.6 (Une Équation). Résolvons $\ln(2x-3)=0$. Domaine : $2x-3>0$, soit $x>\frac{3}{2}$. Pour $x>\frac{3}{2}$, comme $0=\ln(1)$,

$$\ln(2x-3)=\ln(1)\Leftrightarrow 2x-3=1\Leftrightarrow x=2$$

(Théorème 5.1 (ii)). Or $2>\frac{3}{2}$, donc $S=\{2\}$.

Exemple 5.7 (Une Inéquation). Résolvons $\ln(x)\leq 1$. Domaine : $x>0$. Pour $x>0$, comme $1=\ln(e)$, l'inéquation équivaut à $x\leq e$ (Théorème 5.1 (ii)). Donc $S=]0,e]$. De même, $\ln(x)>0\Leftrightarrow x>1$ (Théorème 5.1 (ii) avec $y=1$).

5.6 Logarithme en Base b

En divisant ln par une constante, on obtient le logarithme en base b ; en base 10, il compte les puissances de 10.

Définition 5.3 (Logarithme en Base b). Soit b un réel tel que $b > 0$ et $b \neq 1$, de sorte que $\ln(b) \neq 0$ (Théorème 5.1 (iii)). Le *logarithme en base b* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

Le *logarithme décimal* est le logarithme en base 10, noté $\log_{10}$ ou log.

Théorème 5.7 (Propriétés de $\log_b$). Soit $b > 0$, $b \neq 1$. Pour tous $x, y > 0$ et tout entier relatif n :

(i) $\log_b(1) = 0$, $\log_b(b) = 1$, et $\log_b(b^n) = n$;

(ii) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$, $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$, $\log_b(x^n) = n\log_b(x)$;

(iii) $\log_b(x) = \log_b(y) \Leftrightarrow x = y$; si $b > 1$, $\log_b$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Preuve. On divise par $\ln(b)$ l'égalité $\ln(1) = 0$ (Définition 5.1) et les égalités du Théorème 5.2 et du Théorème 5.1 (ii) ; si $b > 1$, $\ln(b) > 0$ (Théorème 5.1 (iii)), et diviser par $\ln(b)$ conserve l'ordre.

Exemple : le Logarithme Décimal

Exemple 5.8 (Logarithme Décimal). Par le Théorème 5.7,

$$\log_{10}(0{,}001) = \log_{10}\left(10^{-3}\right) = -3, \qquad \log_{10}(2) + \log_{10}(5) = \log_{10}(10) = 1.$$

Un entier $N \geq 1$ qui s'écrit avec k chiffres vérifie $10^{k-1} \leq N < 10^k$, donc $k - 1 \leq \log_{10}(N) < k$ ($\log_{10}$ est strictement croissante et $\log_{10}(10^m) = m$, Théorème 5.7) : le logarithme décimal compte les chiffres. Par exemple, $\log_{10}(2024) \approx 3{,}31$, et 2024 a 4 chiffres.

À retenir

On retient la définition du logarithme, ses propriétés algébriques, sa dérivée, ses limites, le nombre e, et la méthode de résolution des équations.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Définition : ln est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $\ln(1) = 0$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$; elle est strictement croissante, négative sur $]0, 1[$ et positive sur $]1, +\infty[$ (Définition 5.1, Théorème 5.1).
- Pour $x, y > 0$ et n entier relatif : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$, $\ln(x^n) = n\ln(x)$ (Théorème 5.2).
- Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle, $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ (Théorème 5.3).
- Limites : $-\infty$ en 0^+, $+\infty$ en $+\infty$; x^n l'emporte sur $\ln(x)$ (Théorèmes 5.4 et 5.5).
- $\ln(x) = k$ a une unique solution ; $\ln(e) = 1$; une équation se résout sur son domaine (Théorèmes 5.1 et 5.6, Définition 5.2).
- $\log_b = \dfrac{\ln}{\ln(b)}$ pour $b > 0$, $b \neq 1$ (Définition 5.3, Théorème 5.7).

La suite : la fonction exponentielle (cours 6 [5]).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.