Cours 6

Fonction Exponentielle

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

11 novembre 2026

Plan

Introduction

6.1 Définition et Lien avec le Logarithme

6.2 Propriétés Algébriques et Notation

6.3 Dérivée et Sens de Variation

6.4 Limites

6.5 Équations et Inéquations

6.6 Puissances d'Exposant Réel

À retenir

Introduction

Quelle fonction transforme une somme en produit ? Cette leçon définit l'exponentielle comme la réciproque du logarithme, démontre qu'elle est égale à sa dérivée, en tire ses propriétés, ses limites et les puissances d'exposant réel, et l'applique à la résolution d'équations et d'inéquations.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les limites et leurs opérations (cours 2 [1]) ; la continuité (cours 3 [2]) ; les règles de dérivation et le lien entre signe de la dérivée et sens de variation (cours 4 [3]) ; le logarithme népérien et le nombre e (cours 5 [4]).
- **Les objets :** la fonction exponentielle, réciproque du logarithme ; la notation e^x et ses règles de calcul ; la dérivée de e^u ; les limites et les croissances comparées ; les puissances a^b d'exposant réel.
- **Ce qu'on saura faire :** simplifier une expression, étudier une fonction, lever une forme indéterminée, résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles.
- **Et ensuite :** la convexité (cours 8 [5]) ; les primitives et les intégrales (cours 9 [6]) ; les équations différentielles $y' = ay$ (cours 13 [7]).

6.1 Définition et Lien avec le Logarithme

Tout réel x est le logarithme d'un unique réel strictement positif : c'est l'exponentielle de x.

Définition 6.1 (Fonction Exponentielle). Pour tout réel x, l'équation $\ln(y) = x$ a une unique solution y dans $\mathbb{R}_+^*$ (Théorème 5.6 du cours 5 [4]). On la note $\exp(x)$: c'est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut x. La fonction exp, définie sur $\mathbb{R}$, est appelée *fonction exponentielle*.

Théorème 6.1 (Réciprocité).

(i) Pour tout réel x : $\exp(x) > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$.

(ii) Pour tout réel $y > 0$: $\exp(\ln(y)) = y$.

(iii) Pour tout réel x et tout réel $y > 0$: $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

(iv) $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Preuve du Théorème 6.1

Preuve. (i) C'est la Définition 6.1.

(ii) Les réels $\exp(\ln(y))$ et y sont strictement positifs et ont le même logarithme, $\ln(y)$, par (i). Ils sont donc égaux (Théorème 5.1 (ii) du cours 5 [4]).

(iii) Si $\exp(x) = y$, on prend le logarithme des deux membres : $x = \ln(y)$ par (i). Réciproquement, si $x = \ln(y)$, alors $\exp(x) = y$ par (ii).

(iv) On applique (iii) : $\ln(1) = 0$ (Définition 5.1 du cours 5) donne $\exp(0) = 1$, et $\ln(e) = 1$ (Définition 5.2 du cours 5 [4]) donne $\exp(1) = e$.

Lire le théorème. L'exponentielle « défait » le logarithme et réciproquement : on dit que exp est la *fonction réciproque* de ln. Dans un repère orthonormé, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, car le point (x, y) est sur la courbe de exp si et seulement si le point (y, x) est sur celle de ln (Théorème 6.1 (iii)).

6.2 Propriétés Algébriques et Notation

L'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles, ce qui justifie la notation e^x.

Théorème 6.2 (Propriétés Algébriques). Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

(i) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

(ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ et $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;

(iii) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Preuve. Dans chaque égalité, les deux membres sont strictement positifs (Théorème 6.1 (i)) ; il suffit de montrer qu'ils ont le même logarithme (Théorème 5.1 (ii) du cours 5 [4]). (i) Par le Théorème 5.2 (i) du cours 5 [4] et le Théorème 6.1 (i),

$\ln(\exp(x)\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x+y))$. (ii) De même, $\ln\left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right) = -x$ par le Théorème 5.2 (ii) du cours 5 [4], puis on applique (i) à x et $-y$. (iii) $\ln((\exp(x))^n) = nx$ par le Théorème 5.2 (iii) du cours 5 [4].

La Notation e^x

Définition 6.2 (Notation e^x). Par le Théorème 6.2 (iii) avec $x = 1$, et le Théorème 6.1 (iv), $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$ pour tout entier relatif n, où $e \approx 2{,}718$ (Définition 5.2 du cours 5 [4]). On étend cette écriture à tout réel x : on note

$$e^x = \exp(x).$$

Le Théorème 6.2 s'écrit alors comme les règles de calcul sur les puissances : pour tous réels x, y et tout entier relatif n,

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \qquad (e^x)^n = e^{nx},$$

et le Théorème 6.1 donne $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^x > 0$, $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(y)} = y$ pour $y > 0$.

Exemple 6.1 (Simplifications). Par le Théorème 6.2 et le Théorème 6.1 (ii),

$$\frac{(e^x)^3}{e^{x+1}} = \frac{e^{3x}}{e^{x+1}} = e^{2x-1}, \qquad e^{2+\ln(3)} = e^2 e^{\ln(3)} = 3e^2, \qquad e^{-\ln(2)} = \frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}.$$

6.3 Dérivée et Sens de Variation

L'exponentielle est égale à sa dérivée ; elle est strictement positive et strictement croissante.

Théorème 6.3 (Continuité). La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$. Ce théorème est admis : la fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle est continue.

Théorème 6.4 (Dérivée). La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\exp' = \exp$: pour tout réel x, $(e^x)' = e^x$.

Lire le théorème. La seule propriété admise dans cette leçon est la continuité (Théorème 6.3) ; la dérivabilité et l'égalité $\exp' = \exp$ s'en déduisent, à l'aide de la dérivée de ln.

Preuve du Théorème 6.4

Preuve. Soient a un réel et $b = e^a > 0$. Pour $h \neq 0$, posons $y_h = e^{a+h} > 0$. Alors $\ln(y_h) - \ln(b) = (a+h) - a = h \neq 0$ (Théorème 6.1 (i)), donc $y_h \neq b$, et

$$\frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \frac{y_h - b}{\ln(y_h) - \ln(b)} = 1 \Big/ \frac{\ln(y_h) - \ln(b)}{y_h - b}.$$

Quand $h \to 0$, $y_h \to b$ (Théorème 6.3), avec $y_h \neq b$. Or $\dfrac{\ln(y) - \ln(b)}{y - b} \to \ln'(b) = \dfrac{1}{b}$ quand $y \to b$ (Définition 5.1 du cours 5 [4] et Définition 4.1 du cours 4 [3]). Par le Théorème 2.4, puis le Théorème 2.3 (i) du cours 2 [1], le taux de variation de exp entre a et $a+h$ tend vers $1 \Big/ \dfrac{1}{b} = b = e^a$.

Théorème 6.5 (Sens de Variation).

(i) La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tous réels x, y : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$, et $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.

Preuve. (i) $\exp'(x) = e^x > 0$ pour tout réel x (Théorèmes 6.4 et 6.1 (i)), et on applique le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3]. (ii) Si $x < y$, alors $e^x < e^y$ par (i) ; de même si $y < x$. Donc $e^x = e^y$ impose $x = y$, et $e^x < e^y$ impose $x < y$.

Théorème 6.6 (Dérivée de e^u). Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}.$$

En particulier, pour tous réels a et b, $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve. Théorème 4.4 du cours 4 [3], avec $v = \exp$, dérivable sur $J = \mathbb{R}$ (Théorème 6.4).

L'Équation $f' = f$

Théorème 6.7 (Caractérisation). La fonction exp est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

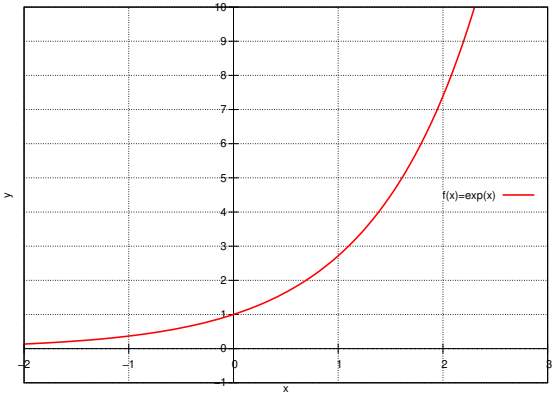
Preuve. La fonction exp convient (Théorèmes 6.4 et 6.1 (iv)). Soit f une fonction qui convient, et $g(x) = f(x)\, e^{-x}$. Par le Théorème 4.3 du cours 4 [3] et le Théorème 6.6 avec $u(x) = -x$,

$$g'(x) = f'(x)\, e^{-x} - f(x)\, e^{-x} = 0$$

pour tout réel x. Donc g est constante sur $\mathbb{R}$ (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [3]), égale à $g(0) = f(0) = 1$. Ainsi $f(x)\, e^{-x} = 1$, soit $f(x) = e^x$ (Théorème 6.2 (ii)).

Lire le théorème. Beaucoup de manuels *définissent* l'exponentielle par cette propriété, en admettant l'existence d'une telle fonction ; le Théorème 6.7 montre que les deux définitions donnent la même fonction. L'équation $y' = ay$ est étudiée dans le cours 13 [7].

Courbe de la Fonction Exponentielle



La courbe passe par les points $(0, 1)$ et $(1, e)$ (Théorème 6.1 (iv)) et reste au-dessus de l'axe des abscisses (Théorème 6.1 (i)). Elle s'approche de cet axe quand x tend vers $-\infty$ et monte sans borne quand x tend vers $+\infty$ (Théorème 6.8, démontré dans la section 6.4), de plus en plus vite, car sa pente e^x augmente (Théorèmes 6.4 et 6.5).

Exemple : une Étude de Variation

Exemple 6.2 (Variations de xe^x). Soit $f(x) = xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$.
Étape 1 : par le Théorème 4.3 du cours 4 [3] et le Théorème 6.4, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x+1)\,e^x.$$

Étape 2 : comme $e^x > 0$ (Théorème 6.1 (i)), $f'(x)$ a le signe de $x+1$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, +\infty[$; son minimum est $f(-1) = -e^{-1} = -\dfrac{1}{e}$. Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ viennent des Théorèmes 6.9 (avec $n = 1$) et 6.8 (section 6.4), et du Théorème 2.2 du cours 2 [1] :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

6.4 Limites

L'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$, plus vite que toute puissance x^n, $n \geq 1$.

Théorème 6.8 (Limites aux Bornes).

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

En particulier, l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote horizontale à la courbe de exp en $-\infty$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).

Preuve. En $+\infty$: soit M un réel ; posons $K = \ln(|M| + 1)$. Pour $x > K$, $e^x > e^K = |M| + 1 > M$ (Théorèmes 6.5 (ii) et 6.1 (ii)) : c'est la Définition 2.2 (iv) du cours 2 [1]. En $-\infty$: $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$ (Théorème 6.2 (ii)) ; quand $x \to -\infty$, $-x \to +\infty$, donc $e^{-x} \to +\infty$ (Théorème 2.4 du cours 2 et ce qui précède), et $\dfrac{1}{e^{-x}} \to 0$ (Théorème 2.3 (i) du cours 2 [1]).

Croissances Comparées

Théorème 6.9 (Croissances Comparées). Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0.$$

On dit que e^x *l'emporte* sur x^n.

Preuve du Théorème 6.9

Preuve. Cas $n = 1$ en $+\infty$: posons $t = e^x$, qui tend vers $+\infty$ (Théorème 6.8) ; pour $x > 0$, $t = e^x > e^0 = 1$ (Théorèmes 6.5 (ii) et 6.1 (iv)) et $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{t}{\ln(t)}$. Or $\dfrac{\ln(t)}{t} \to 0$ (Théorème 5.5 du cours 5) en restant strictement positif pour $t > 1$ (Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [4]), donc $\dfrac{t}{\ln(t)} \to +\infty$ (Théorème 2.3 (ii) du cours 2) ; on conclut par le Théorème 2.4 du cours 2 [1]. Cas $n \geq 2$: pour $x > 0$, par le Théorème 6.2 (iii),

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n,$$

et $\dfrac{e^X}{X} \to +\infty$ quand $X = \dfrac{x}{n} \to +\infty$ (cas $n = 1$ et Théorèmes 2.2 (ii) et 2.4 du cours 2 [1]). En $-\infty$: pour $x < 0$, posons $X = -x$; alors $x^n e^x = (-1)^n \dfrac{1}{e^X/X^n}$, qui tend vers 0 quand $X \to +\infty$, car $\dfrac{e^X}{X^n} \to +\infty$ par ce qui précède (Théorèmes 2.2 (ii), 2.3 (i) et 2.4 du cours 2 [1]).

Exemple : une Forme Indéterminée

Exemple 6.3 (Factorisation). Calculons $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+e^x}{x^3-e^x}$, forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Étape 1 : on factorise par $e^x \neq 0$:

$$\frac{x^2+e^x}{x^3-e^x} = \frac{e^x\left(\dfrac{x^2}{e^x}+1\right)}{e^x\left(\dfrac{x^3}{e^x}-1\right)} = \frac{\dfrac{x^2}{e^x}+1}{\dfrac{x^3}{e^x}-1}.$$

Étape 2 : pour $n \geq 1$, $\dfrac{x^n}{e^x} = 1\Big/\dfrac{e^x}{x^n} \to 0$ (Théorème 6.9 et Théorème 2.3 (i) du cours 2 [1]). Donc, par les Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [1],

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+e^x}{x^3-e^x} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

Exemple : un Taux de Variation

Exemple 6.4 (Limite en 0). Calculons $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$, forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Étape 1 : soit $f = \exp$. Comme $f(0) = 1$ (Théorème 6.1 (iv)), pour $x \neq 0$,

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

est le taux de variation de f entre 0 et x.

Étape 2 : f est dérivable en 0, et $f'(0) = e^0 = 1$ (Théorème 6.4). Par la Définition 4.1 du cours 4 [3],

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1.$$

6.5 Équations et Inéquations

L'équation $e^x = k$ a une solution si et seulement si $k > 0$; on résout en prenant le logarithme, ou en posant $u = e^x > 0$.

L'Équation $e^x = k$

Théorème 6.10 (Équations et Inéquations). Soit k un réel.

(i) Si $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution, et $e^x > k$ pour tout réel x.

(ii) Si $k > 0$, l'équation $e^x = k$ a une unique solution, $x = \ln(k)$; de plus, $e^x < k \Leftrightarrow x < \ln(k)$ et $e^x > k \Leftrightarrow x > \ln(k)$.

Preuve. (i) $e^x > 0 \geq k$ (Théorème 6.1 (i)). (ii) L'équation est résolue par le Théorème 6.1 (iii). Comme $k = e^{\ln(k)}$ (Théorème 6.1 (ii)), $e^x < k$ s'écrit $e^x < e^{\ln(k)}$, soit $x < \ln(k)$ (Théorème 6.5 (ii)) ; de même pour $e^x > k$.

Méthode. Pour résoudre une équation ou une inéquation avec des exponentielles : (1) écrire chaque membre comme une exponentielle et appliquer le Théorème 6.5 (ii), ou se ramener à $e^X = k$ et appliquer le Théorème 6.10 ; (2) si e^x et $e^{2x} = (e^x)^2$ apparaissent, poser $u = e^x$ et ne garder que les solutions $u > 0$.

Exemples

Exemple 6.5 (Une Équation). Résolvons $e^{x-2} = 3$. Comme $3 > 0$, par le Théorème 6.10 (ii),

$$e^{x-2} = 3 \Leftrightarrow x - 2 = \ln(3) \Leftrightarrow x = 2 + \ln(3).$$

Donc $S = \{2 + \ln(3)\}$. En revanche, $e^{x-2} = -3$ n'a pas de solution (Théorème 6.10 (i)).

Exemple 6.6 (Une Inéquation). Résolvons $e^{2x-1} \leq e^{x+3}$. Par le Théorème 6.5 (ii), elle équivaut à $2x - 1 \leq x + 3$, soit $x \leq 4$. Donc $S =]-\infty, 4]$.

Exemple 6.7 (Un Changement d'Inconnue). Résolvons $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$. Posons $u = e^x > 0$; comme $e^{2x} = u^2$ (Théorème 6.2 (iii)), l'équation devient $u^2 - 3u + 2 = 0$, soit $(u-1)(u-2) = 0$: $u = 1$ ou $u = 2$, deux valeurs strictement positives. Alors $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$ (Théorème 6.10 (ii)). Donc $S = \{0, \ln(2)\}$.

6.6 Puissances d'Exposant Réel

Avec l'exponentielle et le logarithme, on définit a^b pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, et on compare les croissances de e^x, x^p et $\ln(x)$.

Définition 6.3 (Puissance Réelle). Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, on pose

$$a^b = e^{b \ln(a)}.$$

Lire la définition. Pour n entier relatif, $e^{n \ln(a)} = e^{\ln(a^n)} = a^n$ (Théorème 5.2 (iii) du cours 5 [4] et Théorème 6.1 (ii)) : la définition prolonge celle des puissances entières. Pour $a = e$, $e^{b \ln(e)} = e^b$, en accord avec la Définition 6.2 ; et $a^{1/2} = e^{\ln(\sqrt{a})} = \sqrt{a}$ (Théorème 5.2 (iv) du cours 5 [4] et Théorème 6.1 (ii)). On a toujours $a^b > 0$.

Théorème 6.11 (Règles de Calcul). Pour tous réels $a, c > 0$ et tous réels s, t :

(i) $\ln(a^s) = s \ln(a)$;

(ii) $a^{s+t} = a^s a^t$, $a^{-s} = \dfrac{1}{a^s}$, $(a^s)^t = a^{st}$ et $(ac)^s = a^s c^s$;

(iii) pour tout réel p, la fonction $x \mapsto x^p$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, et $(x^p)' = p x^{p-1}$.

Preuve du Théorème 6.11 et Exemple

Preuve. (i) Théorème 6.1 (i). (ii) Par le Théorème 6.2 : $e^{(s+t)\ln(a)} = e^{s\ln(a)}e^{t\ln(a)}$ et $e^{-s\ln(a)} = \dfrac{1}{e^{s\ln(a)}}$; par (i), $(a^s)^t = e^{t\ln(a^s)} = e^{st\ln(a)}$; par le Théorème 5.2 (i) du cours 5 [4], $(ac)^s = e^{s\ln(a)+s\ln(c)} = a^s c^s$. (iii) $x^p = e^{p\ln(x)}$, et $u(x) = p\ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\dfrac{p}{x}$ (Définition 5.1 du cours 5 [4] et Théorème 4.3 du cours 4 [3]). Par le Théorème 6.6, $(x^p)' = \dfrac{p}{x}x^p = px^p x^{-1} = px^{p-1}$, par (ii).

Le point (iii) justifie, pour $x > 0$, le procédé de la Remarque 4.1 du cours 4 [3].

Exemple 6.8 (Une Puissance de 2). Résolvons $2^x = 5$. Par la Définition 6.3, $2^x = e^{x\ln(2)}$, et, comme $5 > 0$, par le Théorème 6.10 (ii), $e^{x\ln(2)} = 5 \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(5)$. Comme $\ln(2) > 0$ (Théorème 5.1 (iii) du cours 5, car $2 > 1$), $S = \left\{\dfrac{\ln(5)}{\ln(2)}\right\} = \{\log_2(5)\}$ (Définition 5.3 du cours 5 [4]).

Croissances Comparées pour un Exposant Réel

Théorème 6.12 (Croissances Comparées, Exposant Réel). Pour tout réel $p > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^p\, e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^p \ln(x) = 0.$$

Les deux dernières limites sont celles qu'annonce la Remarque 5.1 du cours 5 [4].

Preuve du Théorème 6.12

Preuve. Soit $n \geq p$ un entier, $n \geq 1$. Pour $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$ (Théorème 5.1 (iii) du cours 5 [4]), donc $p\ln(x) \leq n\ln(x)$ et $x^p \leq x^n$ (Théorème 6.5 et Définition 6.3) ; ainsi

$$\frac{e^x}{x^p} \geq \frac{e^x}{x^n} \to +\infty \quad \text{(Théorème 6.9)},$$

et on conclut par le Théorème 2.5 (ii) du cours 2 [1]. Pour $x < 0$, $|x|^p e^x = 1 \Big/ \dfrac{e^X}{X^p}$ avec $X = -x \to +\infty$, qui tend vers 0, car $\dfrac{e^X}{X^p} \to +\infty$ par ce qui précède (Théorèmes 2.3 (i) et 2.4 du cours 2 [1]). Pour $x > 0$, posons $t = p\ln(x)$, de sorte que $x^p = e^t$:

$$\frac{\ln(x)}{x^p} = \frac{1}{p} \times \frac{t}{e^t}, \qquad x^p \ln(x) = \frac{1}{p} \times te^t.$$

Quand $x \to +\infty$, $t \to +\infty$, et quand $x \to 0^+$, $t \to -\infty$ (Théorème 5.4 du cours 5 [4] et Théorème 2.2 (ii) du cours 2, car $p > 0$) ; or $\dfrac{t}{e^t} \to 0$ en $+\infty$ et $te^t \to 0$ en $-\infty$ (Théorème 6.9 avec $n = 1$, et Théorème 2.3 (i) du cours 2 [1] pour $\dfrac{t}{e^t} = 1 \Big/ \dfrac{e^t}{t}$). On conclut par le Théorème 2.4 du cours 2 [1].

À retenir

On retient la définition de l'exponentielle, ses règles de calcul, sa dérivée, ses limites, la résolution des équations et les puissances réelles.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Définition : $e^x = \exp(x)$ est l'unique réel strictement positif dont le logarithme vaut x ; $\ln(e^x) = x$, $e^{\ln(y)} = y$ pour $y > 0$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$ (Définitions 6.1 et 6.2, Théorème 6.1).
- $e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $(e^x)^n = e^{nx}$ (Théorème 6.2).
- exp est continue, dérivable, égale à sa dérivée, strictement croissante ; $(e^u)' = u'e^u$; exp est l'unique solution de $f' = f$, $f(0) = 1$ (Théorèmes 6.3 à 6.7).
- Limites : 0 en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$; e^x l'emporte sur x^n (Théorèmes 6.8 et 6.9).
- $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$, et c'est $\ln(k)$; poser $u = e^x > 0$ si besoin (Théorème 6.10).
- $a^b = e^{b\ln(a)}$ pour $a > 0$; $(x^p)' = px^{p-1}$; croissances comparées pour x^p, $p > 0$ réel (Définition 6.3, Théorèmes 6.11 et 6.12).

La suite : la convexité (cours 8 [5]).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 8. Fonction convexe, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 13. Équations différentielles, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.