Cours 7

Probabilité

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

11 novembre 2026

Plan

Introduction

7.1 Univers, Événements et Probabilité

7.2 Propriétés et Probabilité Uniforme

7.3 Probabilité Conditionnelle

7.4 Indépendance

À retenir

Introduction

Comment mesurer les chances d'un résultat quand on lance un dé, tire une boule ou teste un produit ? Cette leçon définit une probabilité sur un univers fini, en établit les règles de calcul, introduit le conditionnement, les arbres et la formule de Bayes, et termine par l'indépendance.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le langage des ensembles : réunion, intersection, complémentaire (cours 19 [3]) ; compter les éléments d'un ensemble fini (cours 17 [2]).
- **Les objets :** l'univers, les événements, une probabilité ; la probabilité uniforme ; la probabilité conditionnelle ; les arbres ; l'indépendance.
- **Ce qu'on saura faire :** modéliser une expérience aléatoire simple, calculer la probabilité d'un événement par dénombrement ou à l'aide d'un arbre, inverser un conditionnement par la formule de Bayes, reconnaître des événements indépendants.
- **Et ensuite :** les variables aléatoires, l'espérance et la loi binomiale (cours 10 [1]).

7.1 Univers, Événements et Probabilité

Une probabilité attribue à chaque issue d'une expérience un poids positif, la somme des poids valant 1 ; la probabilité d'un événement est la somme des poids de ses issues.

Définition 7.1 (Probabilité sur un Univers Fini). Soit Ω un ensemble fini non vide, appelé *univers*. Une *probabilité* sur Ω est la donnée, pour chaque $\omega \in \Omega$, d'un réel $\mathrm{P}(\{\omega\}) \in [0,1]$, de sorte que

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathrm{P}(\{\omega\}) = 1.$$

Pour toute partie A de Ω, on pose alors

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathrm{P}(\{\omega\}),$$

avec la convention $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ (somme vide). On définit ainsi une fonction P sur l'ensemble des parties de Ω.

Dans toute la leçon, P est une probabilité sur un univers fini Ω.

Vocabulaire

Définition 7.2 (Vocabulaire des Événements).

- Un élément ω de Ω est une *issue* ; le singleton $\{\omega\}$ est un *événement élémentaire*.
- Une partie A de Ω est un *événement* ; $\emptyset$ est l'*événement impossible*, Ω l'*événement certain*.
- $\bar{A} = \Omega \setminus A$ est l'*événement contraire* de A.
- $A \cap B$ est l'événement « A et B », $A \cup B$ l'événement « A ou B ».
- A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \emptyset$.

Remarque 7.1 (Rappels sur les Ensembles). Pour toutes parties A, B de Ω :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \qquad A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}), \qquad A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A}),$$

les deux dernières réunions étant formées de deux parties disjointes. Ces égalités découlent des définitions de la réunion, de l'intersection et du complémentaire (cours 19 [3]) : on les vérifie issue par issue.

Deux Exemples

Exemple 7.1 (Lancer d'un Dé Équilibré). On prend $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et $\mathrm{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{6}$ pour tout $\omega \in \Omega$; la somme des six poids vaut 1. Par la Définition 7.1,

$$\mathrm{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{P}(\{5,6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

L'événement $\{2, 4, 6\}$ est « le résultat est pair », l'événement $\{5, 6\}$ est « le résultat est au moins 5 ».

Exemple 7.2 (Lancer d'une Pièce Équilibrée). On prend $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ et $\mathrm{P}(\{\text{pile}\}) = \mathrm{P}(\{\text{face}\}) = \dfrac{1}{2}$.

7.2 Propriétés et Probabilité Uniforme

Les règles de calcul d'une probabilité découlent de la définition ; quand toutes les issues ont le même poids, calculer une probabilité revient à compter.

Propriétés d'une Probabilité

Théorème 7.1 (Propriétés). Pour tous événements A et B :

(i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ et $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$;

(ii) si $A \subset B$, alors $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$; en particulier $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$;

(iii) si A et B sont incompatibles, alors $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$;

(iv) $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$;

(v) $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.

Corollaire 7.1 (Événements Deux à Deux Incompatibles). Si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \cdots + \mathrm{P}(A_n).$$

Preuve du Théorème 7.1 et du Corollaire 7.1

Preuve. (i) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ par la Définition 7.1, et $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$ par convention.

(ii) Si $A \subset B$, la somme qui définit $\mathrm{P}(B)$ est celle qui définit $\mathrm{P}(A)$, augmentée des poids $\mathrm{P}(\{\omega\}) \geq 0$ des issues $\omega \in B \setminus A$; donc $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$. Avec $\emptyset \subset A \subset \Omega$ et (i), on obtient $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

(iii) Si $A \cap B = \emptyset$, chaque issue de $A \cup B$ est dans exactement l'une des parties A et B : la somme des poids sur $A \cup B$ se coupe en la somme sur A et la somme sur B.

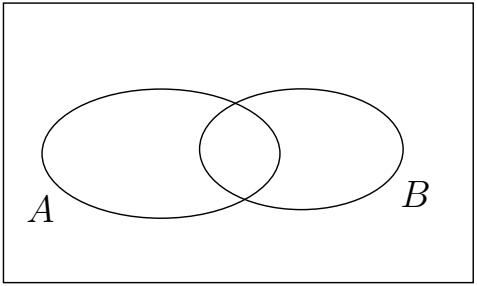
(iv) A et $\bar{A}$ sont incompatibles et $A \cup \bar{A} = \Omega$: par (iii) et (i), $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\bar{A}) = 1$.

(v) $A \cup B$ est la réunion des parties disjointes A et $B \cap \bar{A}$, et B celle des parties disjointes $A \cap B$ et $B \cap \bar{A}$ (Remarque 7.1). Par (iii), $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B \cap \bar{A})$ et $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B) + \mathrm{P}(B \cap \bar{A})$; on soustrait.

Le Corollaire 7.1 se démontre comme (iii) : chaque issue de $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est dans exactement une des parties A_i.

Lire le Théorème 7.1

Lire le théorème. Dans la somme $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$, les issues de $A \cap B$ sont comptées deux fois : on retranche une fois $\mathrm{P}(A \cap B)$ (Théorème 7.1 (v)). Quand A et B sont incompatibles, $\mathrm{P}(A \cap B) = 0$ et on retrouve le Théorème 7.1 (iii).



Probabilité Uniforme

Définition 7.3 (Probabilité Uniforme). La probabilité P est *uniforme* (ou *équiprobable*) si toutes les issues ont le même poids :

$$\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \text{pour tout } \omega \in \Omega.$$

Théorème 7.2 (Calcul par Dénombrement). Si P est uniforme, alors pour tout événement A,

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \qquad (\text{« nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles »}).$$

Preuve. Par la Définition 7.1, $\mathrm{P}(A)$ est la somme de $\mathrm{Card}(A)$ termes égaux à $\frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Remarque 7.2 (Modéliser). Les mots « au hasard », « dé équilibré », « boules indiscernables au toucher » signifient qu'on choisit, sur un univers bien décrit, la probabilité uniforme. C'est un choix de modèle, fait à partir de l'énoncé.

Exemple 7.3 (Un Dé Équilibré, un Dé Truqué).

- La probabilité de l'Exemple 7.1 est uniforme : par le Théorème 7.2, $\mathrm{P}(\{2,4,6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- Dé truqué : $\mathrm{P}(\{6\}) = \frac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{10}$ pour $\omega \in \{1,\ldots,5\}$. La somme des poids vaut $\frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{10} = 1$: c'est une probabilité, qui n'est pas uniforme. Ici, par la Définition 7.1,

$$\mathrm{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}.$$

- Avec le dé équilibré, par le Théorème 7.1 (iv), la probabilité de ne pas obtenir 6 vaut $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

7.3 Probabilité Conditionnelle

Savoir qu'un événement B est réalisé change les chances des autres : on calcule alors dans B, en divisant par $\mathrm{P}(B)$.

Définition 7.4 (Probabilité Conditionnelle). Soit B un événement tel que $\mathrm{P}(B) > 0$. Pour tout événement A, la *probabilité de A sachant B* est

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}.$$

On la note aussi $\mathrm{P}_B(A)$.

Théorème 7.3 (La Probabilité Sachant B). Soit B un événement tel que $\mathrm{P}(B) > 0$. L'application $A \mapsto \mathrm{P}(A \mid B)$ est une probabilité sur Ω. En particulier, le Théorème 7.1 s'applique à elle : pour tout événement A,

$$\mathrm{P}(\bar{A} \mid B) = 1 - \mathrm{P}(A \mid B).$$

Preuve du Théorème 7.3

Preuve. Posons $q_\omega = \dfrac{\mathrm{P}(\{\omega\})}{\mathrm{P}(B)}$ si $\omega \in B$, et $q_\omega = 0$ sinon. Ces réels sont positifs, et pour tout événement A, $\displaystyle\sum_{\omega\in A} q_\omega = \frac{1}{\mathrm{P}(B)} \sum_{\omega\in A\cap B} \mathrm{P}(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A \mid B)$. Pour $A = \Omega$, la somme vaut 1 ; chaque q_ω est donc dans $[0, 1]$, et la Définition 7.1 s'applique.

Lire le théorème. Sachant B, on ne garde que les issues de B, et on multiplie leurs poids par $\dfrac{1}{\mathrm{P}(B)}$ pour que leur somme vaille encore 1. Toutes les règles du Théorème 7.1 restent donc vraies « sachant B ».

Théorème 7.4 (Probabilités Composées).

(i) Si $\mathrm{P}(B) > 0$, alors pour tout événement A, $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}(A \mid B)$.

(ii) Si $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ sont des événements tels que $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \times \mathrm{P}(A_2 \mid A_1) \times \mathrm{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Preuve. (i) On multiplie par $\mathrm{P}(B)$ l'égalité de la Définition 7.4. (ii) Pour $k \leq n-1$, $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ contient $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$, donc sa probabilité est strictement positive (Théorème 7.1 (ii)) : toutes les probabilités conditionnelles écrites sont définies. Par la Définition 7.4, le produit du membre de droite vaut

$$\mathrm{P}(A_1) \times \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathrm{P}(A_1)} \times \cdots \times \frac{\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})},$$

et les facteurs se simplifient deux à deux.

Un Tirage sans Remise

Exemple 7.4 (Une Urne). Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire successivement, au hasard et sans remise, des boules de l'urne. Notons R_k l'événement « la k-ième boule tirée est rouge ».

Étape 1. $\mathrm{P}(R_1) = \frac{3}{5}$: au premier tirage, les 5 boules ont la même chance (Remarque 7.2).

Étape 2. Sachant R_1, il reste 2 boules rouges et 2 bleues, et la deuxième boule est tirée au hasard parmi elles : $\mathrm{P}(R_2 \mid R_1) = \frac{2}{4}$. Par le Théorème 7.4 (i),

$$\mathrm{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}.$$

Étape 3. Comme $\mathrm{P}(R_1 \cap R_2) > 0$, et que, sachant $R_1 \cap R_2$, il reste 1 boule rouge et 2 bleues, $\mathrm{P}(R_3 \mid R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3}$; par le Théorème 7.4 (ii),

$$\mathrm{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}.$$

Formule des Probabilités Totales

Définition 7.5 (Partition). Des événements $B_1, \ldots, B_n$ forment une *partition* de Ω s'ils sont deux à deux incompatibles et si $B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$. Par exemple, pour tout événement B, les événements B et $\bar{B}$ forment une partition de Ω.

Théorème 7.5 (Probabilités Totales). Soit $B_1, \ldots, B_n$ une partition de Ω telle que $\mathrm{P}(B_i) > 0$ pour tout i. Alors, pour tout événement A,

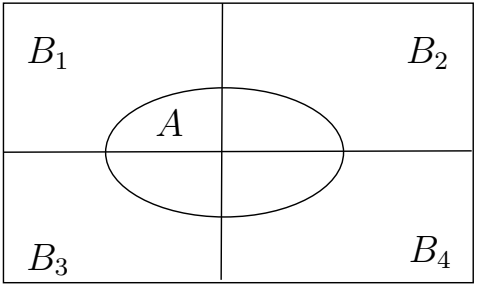
$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B_1) + \cdots + \mathrm{P}(A \cap B_n) = \mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1) + \cdots + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}(A \mid B_n).$$

Preuve. Les événements $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$ sont deux à deux incompatibles, et leur réunion est $A \cap \Omega = A$. On applique le Corollaire 7.1, puis le Théorème 7.4 (i) à chaque terme.

Lire le Théorème 7.5

Lire le théorème. Pour calculer $\mathrm{P}(A)$, on découpe A selon les cas $B_1, \ldots, B_n$, dans chacun desquels la probabilité de A est connue. Le cas le plus courant est celui de la partition B, $\bar{B}$, avec $0 < \mathrm{P}(B) < 1$:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\bar{B})\mathrm{P}(A \mid \bar{B}).$$



Arbre des Probabilités

On effectue une première expérience, qui réalise B ou $\bar{B}$, avec $0 < \mathrm{P}(B) < 1$, puis une seconde, qui réalise A ou $\bar{A}$. On représente la situation par un *arbre* : les branches du premier niveau portent $\mathrm{P}(B)$ et $\mathrm{P}(\bar{B})$, celles du second niveau les probabilités conditionnelles $\mathrm{P}(A \mid B)$, $\mathrm{P}(\bar{A} \mid B)$, $\mathrm{P}(A \mid \bar{B})$, $\mathrm{P}(\bar{A} \mid \bar{B})$.

Théorème 7.6 (Règles de l'Arbre).

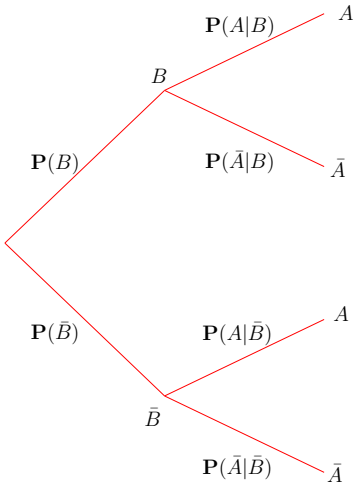
(i) La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.

(ii) La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches : par exemple $\mathrm{P}(B \cap A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$.

(iii) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent : par exemple $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(\bar{B})\mathrm{P}(A \mid \bar{B})$.

Preuve. (i) Théorème 7.1 (iv) et Théorème 7.3. (ii) Théorème 7.4 (i). (iii) Théorème 7.5, et Corollaire 7.1 quand plusieurs chemins mènent à l'événement. Les mêmes règles valent pour un arbre à plus de deux niveaux, dont les nœuds intermédiaires ont une probabilité strictement positive, par le Théorème 7.4 (ii) et le Corollaire 7.1.

L'Arbre


$\mathbf{P}(A|B)$
A
B
$\mathbf{P}(B)$
$\mathbf{P}(\bar{A}|B)$
$\bar{A}$
$\mathbf{P}(\bar{B})$
$\mathbf{P}(A|\bar{B})$
A
$\bar{B}$
$\mathbf{P}(\bar{A}|\bar{B})$
$\bar{A}$

Un Exemple d'Arbre

Exemple 7.5 (Deux Machines). Une usine fabrique 60 % de ses pièces sur une machine M et les autres sur une machine N. Une pièce choisie au hasard est défectueuse avec la probabilité 0,02 si elle vient de M, et 0,05 si elle vient de N. On note encore M et N les événements « la pièce vient de la machine M » et « la pièce vient de la machine N », et D l'événement « la pièce est défectueuse » ; M et $N = \bar{M}$ forment une partition de Ω.

Étape 1 (premier niveau). La pièce étant choisie au hasard, $\mathrm{P}(M) = 0{,}6$ (Théorème 7.2) et $\mathrm{P}(N) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ (Théorème 7.6 (i)).

Étape 2 (second niveau). $\mathrm{P}(D \mid M) = 0{,}02$, $\mathrm{P}(\bar{D} \mid M) = 0{,}98$, $\mathrm{P}(D \mid N) = 0{,}05$, $\mathrm{P}(\bar{D} \mid N) = 0{,}95$ (Théorème 7.6 (i)).

Étape 3 (chemins). Par le Théorème 7.6 (ii), $\mathrm{P}(M \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012$ et $\mathrm{P}(N \cap D) = 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}02$.

Étape 4 (somme). Par le Théorème 7.6 (iii), $\mathrm{P}(D) = 0{,}012 + 0{,}02 = 0{,}032$.

Formule de Bayes

Théorème 7.7 (Formule de Bayes).

(i) Si $\mathrm{P}(A) > 0$ et $\mathrm{P}(B) > 0$, alors

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

(ii) Si $B_1, \ldots, B_n$ est une partition de Ω telle que $\mathrm{P}(B_i) > 0$ pour tout i, et si $\mathrm{P}(A) > 0$, alors pour tout j,

$$\mathrm{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A \mid B_j)}{\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1) + \cdots + \mathrm{P}(B_n)\mathrm{P}(A \mid B_n)}.$$

Preuve. (i) Par le Théorème 7.4 (i), appliqué deux fois, $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B \mid A) = \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A \mid B)$; on divise par $\mathrm{P}(A)$. (ii) On applique (i) à $B = B_j$ et on remplace $\mathrm{P}(A)$ par son expression donnée par le Théorème 7.5.

Lire le théorème. La formule de Bayes « retourne » le conditionnement : elle donne $\mathrm{P}(B_j \mid A)$ à partir des $\mathrm{P}(A \mid B_i)$, que l'énoncé fournit souvent.

Exemple 7.6 (D'où Vient une Pièce Défectueuse ?). Reprenons l'Exemple 7.5 : une pièce prise au hasard est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la machine M ?

Étape 1. $\mathrm{P}(D) = 0{,}032 > 0$ (Exemple 7.5) et $\mathrm{P}(M) = 0{,}6 > 0$.

Étape 2. Par le Théorème 7.7 (i),

$$\mathrm{P}(M \mid D) = \frac{\mathrm{P}(M)\mathrm{P}(D \mid M)}{\mathrm{P}(D)} = \frac{0{,}012}{0{,}032} = \frac{3}{8} = 0{,}375.$$

Étape 3. Par le Théorème 7.3, $\mathrm{P}(N \mid D) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$: la machine N fabrique moins de pièces, mais elle fournit la majorité des pièces défectueuses.

7.4 Indépendance

Deux événements sont indépendants quand savoir que l'un est réalisé ne change pas la probabilité de l'autre.

Deux Événements Indépendants

Définition 7.6 (Événements Indépendants). Deux événements A et B sont *indépendants* si

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}(B).$$

Théorème 7.8 (Caractérisations). Soient A et B deux événements.

(i) Si $\mathrm{P}(B) > 0$: A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(A \mid B) = \mathrm{P}(A)$.

(ii) Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ le sont, ainsi que $\bar{A}$ et B, et $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Preuve. (i) On divise par $\mathrm{P}(B) > 0$ l'égalité de la Définition 7.6 ; réciproquement, on multiplie par $\mathrm{P}(B)$ (Définition 7.4). (ii) A est la réunion des parties disjointes $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ (Remarque 7.1), donc, par le Théorème 7.1 (iii) puis (iv),

$$\mathrm{P}(A \cap \bar{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(\bar{B}).$$

On échange ensuite les rôles de A et B, puis on applique ce résultat à $\bar{A}$ et B.

Exemple 7.7 (Avec un Dé Équilibré). On reprend l'Exemple 7.1, avec $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3, 5\}$.

- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(\{2\}) = \frac{1}{6}$ et $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$: A et B sont indépendants.
- $A \cap C = \emptyset$, donc $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$, alors que $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) = \frac{1}{4}$: A et C sont incompatibles, mais ils ne sont pas indépendants.

Remarque 7.3 (Ne pas Confondre). Si deux événements A et C sont incompatibles et de probabilités strictement positives, ils ne sont pas indépendants : $\mathrm{P}(A \cap C) = 0$, alors que $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C) > 0$. Savoir que C est réalisé dit au contraire que A ne l'est pas.

Plusieurs Événements Indépendants

Définition 7.7 (Indépendance Mutuelle). Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont *mutuellement indépendants* si, pour toute sous-famille $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ d'au moins deux d'entre eux (indices distincts),

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_{i_k}).$$

En particulier, $\mathrm{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(A_n)$.

Théorème 7.9 (Passage aux Contraires). Si $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants, ils le restent quand on remplace certains d'entre eux par leurs contraires.

Preuve. Il suffit de remplacer un seul événement, par exemple A_1, puis de recommencer. Une sous-famille qui ne contient pas A_1 n'est pas modifiée. Pour une sous-famille qui le contient, notons C l'intersection des autres événements de la sous-famille et π le produit de leurs probabilités, de sorte que $\mathrm{P}(C) = \pi$ et $\mathrm{P}(A_1 \cap C) = \mathrm{P}(A_1)\pi$ (Définition 7.7, appliquée à ces autres événements, puis à ceux-ci et à A_1 ; la première égalité est immédiate s'il n'y a qu'un autre événement). Comme dans la preuve du Théorème 7.8 (ii),
$\mathrm{P}(\bar{A}_1 \cap C) = \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(A_1 \cap C) = (1 - \mathrm{P}(A_1))\pi = \mathrm{P}(\bar{A}_1)\pi$.

Remarque 7.4 (Modéliser des Épreuves Indépendantes). Quand une expérience est répétée dans les mêmes conditions, sans qu'une répétition influe sur les autres (lancers successifs d'un dé, tirages avec remise, objets testés l'un après l'autre), on suppose que les événements liés à des répétitions différentes sont mutuellement indépendants. C'est une hypothèse de modèle, que l'énoncé ou la situation décrite doit justifier.

Exemple 7.8 (Deux Dés). On lance deux dés équilibrés. On prend pour univers l'ensemble $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ des couples (résultat du premier dé, résultat du second), qui a 36 éléments, muni de la probabilité uniforme (Remarque 7.2). Soient A : « le premier dé donne 6 » et B : « le second dé donne 6 ».

Étape 1. A contient les 6 couples $(6, j)$, donc $\mathrm{P}(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ (Théorème 7.2) ; de même $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{6}$.

Étape 2. $A \cap B = \{(6,6)\}$, donc $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{36} = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$: dans ce modèle, A et B sont indépendants, comme le prévoit la Remarque 7.4.

À retenir

On retient la définition d'une probabilité, ses règles de calcul, le conditionnement avec ses trois formules, les règles de l'arbre et l'indépendance.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Une probabilité sur un univers fini donne à chaque issue un poids, la somme des poids valant 1 ; $\mathrm{P}(A)$ est la somme des poids des issues de A (Définition 7.1).
- $\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - \mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$, et la somme pour des événements incompatibles (Théorème 7.1, Corollaire 7.1).
- Probabilité uniforme : $\mathrm{P}(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ (Définition 7.3, Théorème 7.2).
- $\mathrm{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ pour $\mathrm{P}(B) > 0$; c'est une probabilité en A (Définition 7.4, Théorème 7.3).
- Probabilités composées, probabilités totales, règles de l'arbre, formule de Bayes (Théorèmes 7.4 à 7.7).
- Indépendance : $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$; à ne pas confondre avec l'incompatibilité ; indépendance mutuelle et passage aux contraires (Définitions 7.6 et 7.7, Théorèmes 7.8 et 7.9).

La suite : les variables aléatoires (cours 10 [1]).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.