Cours 8

Fonction Convexe

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

11 novembre 2026

Plan

Introduction

8.1 Dérivée Seconde et Fonction Convexe

8.2 Caractérisation de la Convexité

8.3 Point d'Inflexion

À retenir

Introduction

Certaines courbes s'incurvent vers le haut, d'autres vers le bas. Cette leçon donne un sens précis à cette forme : la convexité, définie par la position de la courbe par rapport à ses cordes, puis caractérisée par la dérivée seconde et par les tangentes ; la leçon se termine par les points d'inflexion, où la forme change.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** la dérivée, le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation, la tangente (cours 4 [3]) ; le passage à la limite dans les inégalités (cours 1 [1]) et les limites à gauche et à droite (cours 2 [2]) ; les fonctions logarithme et exponentielle, pour les exemples (cours 5 [4] et cours 6 [5]).
- **Les objets :** la dérivée seconde ; les fonctions convexes et concaves ; les cordes et les tangentes d'une courbe ; les points d'inflexion.
- **Ce qu'on saura faire :** étudier la convexité d'une fonction par le signe de sa dérivée seconde, en déduire des inégalités à l'aide des tangentes ou des cordes, trouver les points d'inflexion d'une courbe.
- **Et ensuite :** la convexité complète l'étude d'une fonction (variations, limites) et sert à démontrer des inégalités.

Dans toute la leçon, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.

8.1 Dérivée Seconde et Fonction Convexe

Une fonction est convexe sur un intervalle quand sa courbe est sous chacune de ses cordes ; concave quand elle est au-dessus.

Définition 8.1 (Dérivée Seconde). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *deux fois dérivable sur I* si f est dérivable sur I et si sa fonction dérivée f' est dérivable sur I. La fonction

$$f'' = (f')'$$

est alors appelée *dérivée seconde* de f.

Exemple 8.1 (Un Polynôme). Soit $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$, pour $x \in \mathbb{R}$. Par les Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [3], f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 6x - 5$; f' est à son tour dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f''(x) = 6.$$

Définition 8.2 (Fonction Convexe, Fonction Concave). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- f est *convexe sur* I si, pour tous $a, b \in I$ et tout $t \in [0,1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

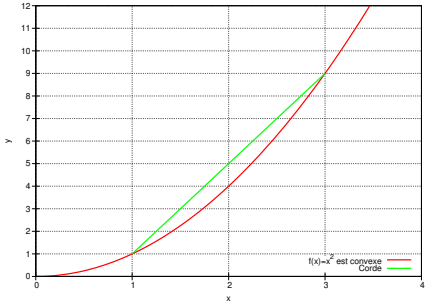
- f est *concave sur* I si, pour tous $a, b \in I$ et tout $t \in [0,1]$,

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Remarque 8.1 (Concave et Convexe). En multipliant l'inégalité par -1, on voit que f est concave sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I. Une fonction affine $x \mapsto px + q$ est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$: les deux membres sont égaux.

Lire la Définition 8.2

Lire la définition. Soient $a < b$ dans I, $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$. Quand t parcourt $[0, 1]$, le réel $x = ta + (1 - t)b$ parcourt $[a, b]$, et le point d'abscisse x du segment $[AB]$ a pour ordonnée $tf(a) + (1 - t)f(b)$. Le segment $[AB]$ est une *corde* de $\mathcal{C}_f$: f est convexe sur I si, pour tous $a < b$ dans I, la courbe est, entre a et b, sous la corde $[AB]$.



La Fonction Carré est Convexe

Exemple 8.2 (Par la Définition). Soit $f(x) = x^2$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Étape 1 (un cas). Avec $a = 1$, $b = 3$ et $t = \dfrac{1}{2}$ (figure précédente) : $ta + (1-t)b = 2$, et

$$f(2) = 4 \leq \frac{f(1) + f(3)}{2} = \frac{1+9}{2} = 5.$$

Étape 2 (le cas général). Pour tous réels a, b et tout $t \in [0,1]$, notons $D = tf(a) + (1-t) f(b) - f(ta + (1-t)b)$. On développe :

$$D = ta^2 + (1-t) b^2 - t^2 a^2 - 2t(1-t) ab - (1-t)^2 b^2.$$

Comme $t - t^2 = t(1-t)$ et $(1-t) - (1-t)^2 = t(1-t)$,

$$D = t(1-t)\left(a^2 - 2ab + b^2\right) = t(1-t)(a-b)^2.$$

Étape 3. Comme $t \geq 0$, $1 - t \geq 0$ et $(a-b)^2 \geq 0$, $D \geq 0$: f est convexe sur $\mathbb{R}$ (Définition 8.2).

8.2 Caractérisation de la Convexité

Pour une fonction deux fois dérivable, la convexité se lit sur le signe de la dérivée seconde ; elle dit aussi que la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Caractérisation de la Convexité

Théorème 8.1 (Caractérisation de la Convexité). Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$;

(ii) f' est croissante sur I ;

(iii) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de chacune de ses tangentes : pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a) ;$$

(iv) f est convexe sur I.

On démontre (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). L'implication (iv) $\Rightarrow$ (i), qui donne les réciproques, est admise.

Preuve du Théorème 8.1

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). f' est dérivable sur I, donc continue sur I (Théorème 4.1 du cours 4), de dérivée $f'' \geq 0$; par le Théorème 4.5 (i) du cours 4 [3], f' est croissante sur I.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Fixons $a \in I$ et posons $g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$ pour $x \in I$. La fonction g est dérivable, donc continue, sur I, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $g(a) = 0$. Comme f' est croissante, $g' \leq 0$ sur $I \cap]-\infty, a]$ et $g' \geq 0$ sur $I \cap [a, +\infty[$. Par le Théorème 4.5 (i) du cours 4 [3], g est décroissante sur le premier intervalle et croissante sur le second (s'ils ne sont pas réduits à $\{a\}$) : dans les deux cas, $g(x) \geq g(a) = 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve du Théorème 8.1 (suite)

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soient $a, b \in I$, $t \in [0,1]$ et $c = ta + (1-t)\,b$. Le réel c est entre a et b, donc dans l'intervalle I. Par (iii), écrit au point c pour $x = a$ puis pour $x = b$,

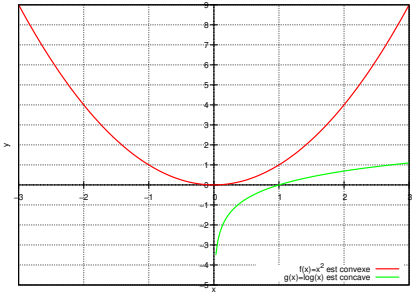
$$f(a) \geq f'(c)(a-c) + f(c), \qquad f(b) \geq f'(c)(b-c) + f(c).$$

On multiplie la première inégalité par $t \geq 0$, la seconde par $1-t \geq 0$, et on les ajoute :

$$tf(a) + (1-t)\,f(b) \geq f'(c)(ta + (1-t)\,b - c) + f(c) = f(c).$$

Lire le Théorème 8.1

Lire le théorème. Pour étudier la convexité d'une fonction deux fois dérivable, on calcule f'' et on étudie son signe : c'est la propriété (i), la plus simple à vérifier. La propriété (iii) dit que la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes ; elle fournit des inégalités ; l'Exemple 8.4 utilise la propriété analogue (iii) du Corollaire 8.1. La tangente au point d'abscisse a est celle de la Définition 4.3 du cours 4 [3].



La fonction carré, convexe, et la fonction ln, concave (notée log sur la figure).

Corollaire 8.1 (Caractérisation de la Concavité). Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$;

(ii) f' est décroissante sur I ;

(iii) $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de chacune de ses tangentes : pour tous $a, x \in I$,

$$f(x) \leq f'(a)(x-a) + f(a) ;$$

(iv) f est concave sur I.

Preuve. On applique le Théorème 8.1 à $-f$, qui est deux fois dérivable sur I, avec $(-f)' = -f'$ et $(-f)'' = -f''$ (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [3]). Chacune des propriétés (i) à (iv) pour $-f$ équivaut à la même propriété pour f, l'inégalité ou le sens de variation étant renversé : pour (iv), c'est la Remarque 8.1.

Exemple 8.3 (Carré et Logarithme).

- Soit $f(x) = x^2$. Pour tout réel x, $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2 \geq 0$: par le Théorème 8.1, f est convexe sur $\mathbb{R}$, ce que l'Exemple 8.2 a vérifié directement.
- Soit $f(x) = \ln(x)$, pour $x > 0$. Par le Théorème 4.2 du cours 4 [3], ln est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, elle-même dérivable sur cet intervalle : ln est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Par le Corollaire 8.1, f est concave sur $]0, +\infty[$.

Une Inégalité par une Tangente

Exemple 8.4 (Logarithme et Tangente en 1). Montrons que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Étape 1. La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$ (Exemple 8.3).

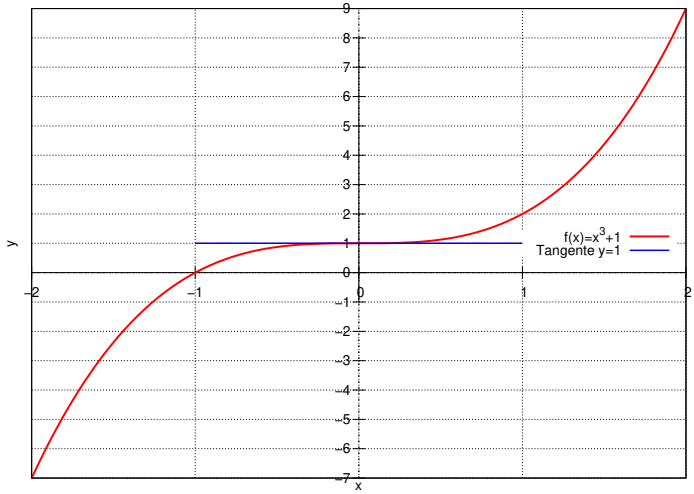
Étape 2. En $a = 1$: $\ln(1) = 0$ et $\ln'(1) = 1$ (Exemple 8.3). La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 1 \times (x - 1) + 0 = x - 1$ (Définition 4.3 du cours 4 [3]).

Étape 3. Par le Corollaire 8.1 (iii), appliqué avec $a = 1$, la courbe de ln est au-dessous de cette tangente : $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

8.3 Point d'Inflexion

En un point d'inflexion, la dérivée seconde change de signe : la fonction passe de convexe à concave, ou l'inverse, et la courbe traverse sa tangente.

Un Point d'Inflexion



La courbe de $x \mapsto x^3 + 1$ et sa tangente $y = 1$ au point d'abscisse 0 (Exemple 8.5).

Définition 8.3 (Point d'Inflexion). Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, et a un point de I qui n'en est pas une borne. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet un *point d'inflexion* au point $A(a, f(a))$ s'il existe un réel $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset I$ et

- $f'' > 0$ sur $]a-h, a[$ et $f'' < 0$ sur $]a, a+h[$,
- ou $f'' < 0$ sur $]a-h, a[$ et $f'' > 0$ sur $]a, a+h[$.

On dit alors que f'' *change de signe* en a.

Remarque 8.2 (Méthode et Mise en Garde). On cherche les points d'inflexion en étudiant le signe de f''. En un point d'inflexion, $f''(a) = 0$. En effet, dans le premier cas de la Définition 8.3, f' est continue sur I (Théorème 4.1 du cours 4), de dérivée $f'' > 0$ sur $]a-h, a[$ et $f'' < 0$ sur $]a, a+h[$: f' est strictement croissante sur $]a-h, a]$ et strictement décroissante sur $[a, a+h[$ (Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3]). Le taux $\dfrac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ est donc > 0 pour $x \in]a-h, a[$ et < 0 pour $x \in]a, a+h[$. Il tend vers $f''(a)$ quand x tend vers a, donc ses limites à gauche et à droite valent $f''(a)$ (Théorème 2.6 du cours 2 [2]). Par passage à la limite dans les inégalités (admis ici pour les fonctions, comme le Théorème 1.9 du cours 1 [1] pour les suites), $f''(a) \geq 0$ et $f''(a) \leq 0$. Le second cas est analogue.

La réciproque est fausse : pour $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe : $f'' > 0$ des deux côtés de 0, aucun des deux cas de la Définition 8.3 n'a lieu, et la courbe n'a pas de point d'inflexion en $(0, 0)$; f est convexe sur $\mathbb{R}$ (Théorème 8.1).

Point d'Inflexion et Tangente

Théorème 8.2 (Point d'Inflexion et Tangente). Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, telle que $\mathcal{C}_f$ admette un point d'inflexion en $A(a, f(a))$, avec, pour le réel h de la Définition 8.3, $f'' > 0$ sur $]a-h, a[$ et $f'' < 0$ sur $]a, a+h[$. Notons $T(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$. Alors :

(i) f est convexe sur $]a-h, a]$ et concave sur $[a, a+h[$;

(ii) la courbe traverse sa tangente en A : $f(x) > T(x)$ pour $x \in]a-h, a[$, et $f(x) < T(x)$ pour $x \in]a, a+h[$.

Dans le second cas de la Définition 8.3, les conclusions sont inversées.

Preuve. (i) Par la Remarque 8.2, $f''(a) = 0$: $f'' \geq 0$ sur $]a-h, a]$ et $f'' \leq 0$ sur $[a, a+h[$. On applique le Théorème 8.1 et le Corollaire 8.1 sur chacun des deux intervalles. (ii) Posons $g(x) = f(x) - T(x)$ sur $]a-h, a+h[$: $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $g(a) = 0$. Comme on l'a vu dans la Remarque 8.2, f' est strictement croissante sur $]a-h, a]$ et strictement décroissante sur $[a, a+h[$: $g' < 0$ sur $]a-h, a[$ et sur $]a, a+h[$, et g' ne s'annule qu'en a. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3], g est strictement décroissante sur $]a-h, a+h[$: $g(x) > g(a) = 0$ pour $x < a$, et $g(x) < 0$ pour $x > a$.

Exemple

Exemple 8.5 (La Fonction $x \mapsto x^3 + 1$). Soit $f(x) = x^3 + 1$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Étape 1. $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [3]).

Étape 2. $f'' < 0$ sur $]-\infty, 0[$, $f''(0) = 0$ et $f'' > 0$ sur $]0, +\infty[$: f est concave sur $]-\infty, 0]$ et convexe sur $[0, +\infty[$ (Corollaire 8.1, Théorème 8.1), et, 0 n'étant pas une borne de $\mathbb{R}$ (tout $h > 0$ convient ici), $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $A(0, 1)$ (Définition 8.3).

Étape 3. $f'(0) = 0$: la tangente en A est la droite $y = 1$. Par le Théorème 8.2 (ii), dans le second cas et avec un réel $h > 0$ quelconque, la courbe est strictement au-dessous de la tangente pour $x < 0$ et strictement au-dessus pour $x > 0$; c'est bien le signe de $f(x) - 1 = x^3$.

À retenir

On retient la définition de la convexité par les cordes, sa lecture sur le signe de la dérivée seconde et sur les tangentes, et la définition d'un point d'inflexion.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- f est convexe sur I si sa courbe est sous ses cordes : $f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$; concave si l'inégalité est inversée, c'est-à-dire si $-f$ est convexe (Définition 8.2, Remarque 8.1).
- Pour f deux fois dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I, si et seulement si f' est croissante sur I, si et seulement si la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes (Théorème 8.1) ; de même pour la concavité, avec les inégalités inversées (Corollaire 8.1).
- Les tangentes et les cordes donnent des inégalités, comme $\ln(x) \leq x - 1$ pour $x > 0$ (Exemple 8.4).
- Un point d'inflexion est un point où f'' change de signe ; la convexité y change et la courbe y traverse sa tangente (Définition 8.3, Théorème 8.2). La condition $f''(a) = 0$ ne suffit pas (Remarque 8.2).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.