Cours 9

Primitive et Intégrale

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

12 novembre 2026

Plan

Introduction

9.1 Primitive

9.2 Intégrale

9.3 Propriétés de l'Intégrale

9.4 Aire et Valeur Moyenne

À retenir

Introduction

Dériver une fonction donne sa pente ; cette leçon fait le chemin inverse. Une primitive de f est une fonction dont la dérivée est f ; elle permet de définir l'intégrale, qui mesure une aire et une valeur moyenne.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** la continuité (cours 3 [1]) ; la dérivée, ses règles de calcul et le lien entre son signe et le sens de variation (cours 4 [2]) ; les fonctions logarithme et exponentielle (cours 5 [3] et cours 6 [4]).
- **Les objets :** les primitives d'une fonction ; l'intégrale d'une fonction continue entre deux réels ; l'aire sous une courbe ; la valeur moyenne d'une fonction.
- **Ce qu'on saura faire :** trouver une primitive à l'aide des formules usuelles, calculer une intégrale, intégrer par parties, calculer une aire et une valeur moyenne.
- **Et ensuite :** l'intégrale sert au calcul des aires et des volumes, des probabilités de lois continues et des solutions d'équations différentielles.

Dans toute la leçon, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

9.1 Primitive

Une primitive de f sur un intervalle est une fonction dont la dérivée est f ;
sur un intervalle, deux primitives diffèrent d'une constante.

Primitive

Définition 9.1 (Primitive). Soit f une fonction définie sur I. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Exemple 9.1 (La Fonction $x \mapsto x$). La fonction $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$: par les Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2], $F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$. La fonction $\dfrac{x^2}{2} + 5$ en est une autre.

Lire la définition. Une fonction a une seule dérivée, mais plusieurs primitives : on dit *une* primitive, et non *la* primitive.

Théorème 9.1 (Primitives d'une Fonction). Soit f une fonction définie sur I, et F une primitive de f sur I. Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où c est un réel.

Preuve. Pour tout réel c, $(F + c)' = F' = f$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]) : $F + c$ est une primitive de f. Réciproquement, si G est une primitive de f sur I, la fonction $G - F$ est dérivable sur I, de dérivée $f - f = 0$; par le Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [2], elle est constante sur l'intervalle I : $G = F + c$ pour un réel c.

Remarque 9.1 (L'Intervalle est Indispensable). Sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle, la fonction égale à $\frac{1}{x} + 1$ pour $x < 0$ et à $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$ a pour dérivée $-\frac{1}{x^2}$, comme $\frac{1}{x}$, sans en différer d'une constante.

Primitive Prenant une Valeur Donnée

Corollaire 9.1 (Primitive Prenant une Valeur Donnée). Soit f une fonction qui admet une primitive F sur I, $x_0 \in I$ et y_0 un réel. Il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$: c'est $G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0$.

Preuve. Par le Théorème 9.1, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$, et $F(x_0) + c = y_0$ si et seulement si $c = y_0 - F(x_0)$.

Exemple 9.2 (Une Condition Initiale). La primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0 est $G(x) = \frac{x^2}{2} + 1$: par le Corollaire 9.1, avec la primitive $F(x) = \frac{x^2}{2}$ de l'Exemple 9.1, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, c'est $G(x) = F(x) - F(0) + 1$.

Théorème 9.2 (Primitives de Référence). Dans chaque colonne, F est une primitive de f sur l'intervalle indiqué (k est un réel et $n \geq 0$ un entier) :

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln(x)$	e^x	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Preuve. On dérive F par les Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2] : par exemple $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n$, et $(-\cos)' = \sin$.

Somme et Produit par un Réel

Théorème 9.3 (Somme et Produit par un Réel). Soient f et g deux fonctions qui admettent des primitives F et G sur I, et λ, μ deux réels. Alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Preuve. Par le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2], $(\lambda F + \mu G)' = \lambda F' + \mu G' = \lambda f + \mu g$.

Exemple 9.3 (Un Polynôme). Par les Théorèmes 9.2 et 9.3, une primitive de $f(x) = 5 + x - 3x^4$ sur $\mathbb{R}$ est

$$F(x) = 5x + \frac{x^2}{2} - \frac{3x^5}{5}.$$

Primitive d'une Fonction Composée

Théorème 9.4 (Primitive d'une Fonction Composée). Soient u une fonction dérivable sur I, à valeurs dans un intervalle J, et v une fonction dérivable sur J. Alors $v \circ u$ est une primitive de $(v' \circ u) \times u'$ sur I.

Preuve. Par le Théorème 4.4 du cours 4 [2], $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$ pour tout $x \in I$.

Corollaire 9.2 (Primitives Usuelles). Soit u une fonction dérivable sur I, $n \geq 0$ un entier, et $a \neq 0$, b deux réels.

$f(x)$	$u(x)^n u'(x)$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$e^{u(x)} u'(x)$	e^{ax+b}
$F(x)$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	$\ln(u(x))$	$e^{u(x)}$	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$
condition sur I	aucune	$u > 0$	aucune	aucune

Preuve du Corollaire 9.2. Colonne 1 : Théorème 9.4 avec $v(y) = \dfrac{y^{n+1}}{n+1}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée y^n (Théorème 9.2). Colonne 2 : Théorème 5.3 du cours 5 [3], qui donne $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ pour $u > 0$. Colonne 3 : Théorème 6.6 du cours 6 [4]. Colonne 4 : colonne 3 avec $u(x) = ax + b$, $u'(x) = a$, puis le Théorème 9.3 avec $\lambda = \dfrac{1}{a}$.

Exemple 9.4 (Une Exponentielle). Par la colonne 4 avec $a = 3$ et $b = -1$, une primitive de e^{3x-1} sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{3}e^{3x-1}$.

Exemple 9.5 (Un Quotient). Sur $\mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$ est dérivable, de dérivée $2x$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et strictement positive, car $x^2 \geq 0$: par la colonne 2, une primitive de $\dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $\ln\left(x^2+1\right)$.

9.2 Intégrale

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive ; l'intégrale de a à b est la variation $F(b) - F(a)$ d'une primitive F ; elle ne dépend pas de la primitive choisie.

Existence d'une Primitive

Théorème 9.5 (Existence d'une Primitive). Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I. Ce théorème est admis.

Lire le théorème. Le théorème garantit l'existence d'une primitive sans en donner de formule. Les fonctions continues usuelles sont données par le Théorème 3.1 du cours 3, et les sommes, produits et quotients (à dénominateur ne s'annulant pas) de fonctions continues sont continus (Théorème 3.2 du cours 3), ainsi que leurs composées (Théorème 3.3 du cours 3 [1]).

Définition 9.2 (Intégrale). Soit f une fonction continue sur I, F une primitive de f sur I, et a, b deux réels de I. L'*intégrale* de f de a à b est le réel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \quad \text{noté aussi} \quad [F(x)]_a^b.$$

Ce réel ne dépend pas de la primitive choisie : par le Théorème 9.1, une autre primitive s'écrit $F + c$, et $(F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$.

Lire la Définition 9.2

Remarque 9.2 (Notations et Premières Conséquences).

- La variable est *muette* : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- L'ordre des bornes est libre, et $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; en particulier $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
- Si F est dérivable sur I et si F' est continue sur I, alors F est une primitive de F', et $\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Exemple 9.6 (Un Premier Calcul). La fonction $x \mapsto x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [1]), de primitive $\frac{x^2}{2}$ (Exemple 9.1) : $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

Théorème 9.6 (Dérivée d'une Intégrale). Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. La fonction

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in I,$$

est la primitive de f sur I qui s'annule en a : $G' = f$ et $G(a) = 0$.

Preuve. Soit F une primitive de f sur I (Théorème 9.5). Par la Définition 9.2, $G(x) = F(x) - F(a)$: G est dérivable sur I, $G' = F' = f$, et $G(a) = 0$. C'est la seule primitive de f qui s'annule en a (Corollaire 9.1, avec $x_0 = a$ et $y_0 = 0$).

Remarque 9.3 (Le Logarithme). La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (Théorème 3.1 du cours 3 [1]). Par le Théorème 9.6, $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $\dfrac{1}{x}$, et s'annule en 1 : c'est la fonction ln de la Définition 5.1 du cours 5 [3], dont l'existence y était admise ; elle découle ici du Théorème 9.5, lui-même admis.

9.3 Propriétés de l'Intégrale

L'intégrale est linéaire, vérifie la relation de Chasles et respecte l'ordre ; l'intégration par parties ramène une intégrale à une autre.

Théorème 9.7 (Propriétés de l'Intégrale). Soient f et g deux fonctions continues sur I, a, b, c des réels de I et λ, μ deux réels.

(i) *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

(ii) *Relation de Chasles :* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

(iii) *Positivité :* si $a \leq b$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$

(iv) *Comparaison :* si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Preuve du Théorème 9.7

Preuve. Soient F et G des primitives de f et g sur I (Théorème 9.5).

(i) La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue (Théorème 3.2 du cours 3 [1]), de primitive $\lambda F + \mu G$ (Théorème 9.3), et $(\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda (F(b) - F(a)) + \mu (G(b) - G(a))$.

(ii) $(F(b) - F(a)) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a)$.

(iii) Si $a = b$, l'intégrale est nulle (Remarque 9.2). Si $a < b$, F est dérivable sur $[a, b]$, de dérivée $f \geq 0$; par le Théorème 4.5 (i) du cours 4 [2], F est croissante sur $[a, b]$, donc $F(b) \geq F(a)$.

(iv) La fonction $g - f$ est continue (comme en (i)) et positive sur $[a, b]$; par (iii) puis (i),
$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geq 0.$

Théorème 9.8 (Intégration par Parties). Soient u et v deux fonctions dérivables sur I, de dérivées u' et v' continues sur I, et a, b deux réels de I. Alors

$$\int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Preuve. Les fonctions u et v sont continues sur I (Théorème 4.1 du cours 4 [2]), donc $u'v$ et uv' aussi (Théorème 3.2 du cours 3 [1]). Par le Théorème 4.3 (ii) du cours 4 [2], $(uv)' = u'v + uv'$, continue sur I. Par la Remarque 9.2 puis le Théorème 9.7 (i),

$$[u(x)\, v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Exemple

Exemple 9.7 (Intégrer par Parties). Calculons $\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x$.

Étape 1. On pose $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$, d'où $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]) ; u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [1]).

Étape 2. Par le Théorème 9.8, puis le Théorème 9.2 pour la primitive e^x de e^x, avec $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ (Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [4]),

$$\int_0^1 xe^x \, \mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

9.4 Aire et Valeur Moyenne

L'intégrale d'une fonction positive mesure l'aire sous sa courbe ; divisée par la longueur de l'intervalle, elle donne la valeur moyenne de la fonction.

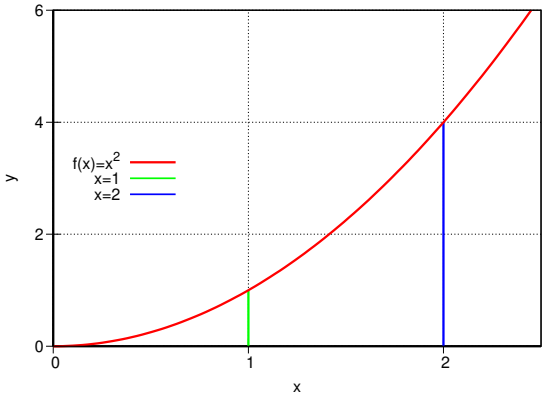
Théorème 9.9 (Intégrale et Aire). Soient $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. Ce théorème est admis.

Remarque 9.4 (Le Signe Compte). Sans l'hypothèse $f \geq 0$, l'intégrale n'est pas une aire : $\int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = [-x]_0^1 = -1$.

Exemple 9.8 (Aire sous une Parabole). La fonction $x \mapsto x^2$ est continue (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]) et positive sur $[1, 2]$, car $x^2 \geq 0$; par les Théorèmes 9.9 et 9.2, l'aire du domaine correspondant est

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ unités d'aire.}$$

Une Aire sous la Courbe



La courbe de $x \mapsto x^2$ (en rouge) et les segments verticaux d'abscisses 1 (en vert) et 2 (en bleu) : le domaine de l'Exemple 9.8 est compris entre la courbe, l'axe des abscisses et ces deux segments.

Corollaire 9.3 (Aire entre Deux Courbes). Soient $a < b$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$, avec $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. L'aire du domaine compris entre les deux courbes et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire,

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Justification. Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a, b]$, ce domaine est celui qui est sous la courbe de g, privé de celui qui est sous la courbe de f ; son aire est $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Théorème 9.9), soit l'intégrale annoncée (Théorème 9.7 (i)). Le cas général, où les courbes peuvent passer sous l'axe des abscisses, est admis.

Définition 9.3 (Valeur Moyenne). Soient $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$. La *valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ est le réel

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lire la définition. Si f est positive, le rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur m a la même aire que le domaine sous la courbe (Théorème 9.9) : m est la hauteur moyenne de la courbe.

Exemple 9.9 (Valeur Moyenne de x^2). La fonction $x \mapsto x^2$ est continue sur $[1, 3]$ (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]). Par la Définition 9.3 et le Théorème 9.2, la valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[1, 3]$ est

$$\frac{1}{3-1} \int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} = \frac{13}{3}.$$

À retenir

On retient les primitives usuelles, la définition de l'intégrale par une primitive, ses propriétés, l'intégration par parties, et la lecture de l'intégrale comme une aire et une valeur moyenne.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante ; une seule prend une valeur donnée en un point (Théorème 9.1, Corollaire 9.1).
- Primitives usuelles : x^n, $\dfrac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$, e^x, cos, sin, et les formes $u^n u'$, $\dfrac{u'}{u}$ avec $u > 0$, $e^u u'$ (Théorèmes 9.2 à 9.4, Corollaire 9.2).
- Toute fonction continue sur un intervalle a une primitive F (admis), et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$; $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive qui s'annule en a (Théorème 9.5, Définition 9.2, Théorème 9.6).
- Linéarité, Chasles, positivité et comparaison (pour $a \leq b$) ; intégration par parties (Théorèmes 9.7 et 9.8).
- Pour f continue, $f \geq 0$ et $a < b$, l'intégrale est l'aire sous la courbe ; entre deux courbes, on intègre $g - f$; valeur moyenne $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Théorème 9.9, Corollaire 9.3, Définition 9.3).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.