Cours 11

Fonctions Trigonométriques

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

12 novembre 2026

Plan

Introduction

11.1 Cercle Trigonométrique, Cosinus et Sinus

11.2 Symétries et Valeurs Remarquables

11.3 Dérivées et Variations

11.4 Équations Trigonométriques

11.5 Fonction Tangente

11.6 Formules d'Addition

À retenir

Introduction

Enrouler la droite réelle sur un cercle de rayon 1 associe à chaque réel un point ; ses deux coordonnées définissent le cosinus et le sinus. Cette leçon en tire leurs propriétés, leurs valeurs remarquables, leurs variations, la fonction tangente et la résolution des équations trigonométriques.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les limites et leurs opérations (cours 2 [1]) ; la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires (cours 3 [2]) ; la dérivation et le sens de variation (cours 4 [3]).
- **Les objets :** le cercle trigonométrique, le point associé à un réel ; les fonctions cosinus, sinus et tangente.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer le cosinus et le sinus des angles remarquables et de leurs associés, étudier les variations de ces fonctions, résoudre $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\tan x = a$, utiliser les formules d'addition.
- **Et ensuite :** le cours sur les nombres complexes écrit $\cos x + i \sin x$ sous forme exponentielle et démontre les formules d'addition (cours 12 [4]).

11.1 Cercle Trigonométrique, Cosinus et Sinus

On enroule la droite réelle sur le cercle trigonométrique ; les coordonnées du point obtenu sont le cosinus et le sinus.

Cercle Trigonométrique

Définition 11.1 (Cercle Trigonométrique). Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 est appelé *cercle trigonométrique*. On note A le point de coordonnées $(1, 0)$. Le *sens trigonométrique* est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Définition 11.2 (Point Associé à un Réel). On admet qu'on peut associer à tout réel x un point $M(x)$ de $\mathcal{C}$, de façon que :

(i) pour $0 \leq x < 2\pi$, $M(x)$ est l'extrémité de l'arc d'origine A, de longueur x, parcouru dans le sens trigonométrique ; tout point de $\mathcal{C}$ est ainsi le point $M(x)$ d'un unique $x \in [0, 2\pi[$;

(ii) pour tout réel x, $M(x + 2\pi) = M(x)$;

(iii) pour tous réels x et y, $M(x) = M(y)$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$.

On dit que x est une mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM(x)}\right)$.

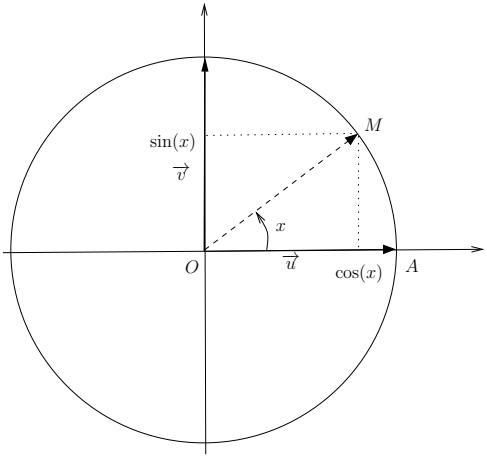
Définition 11.3 (Cosinus et Sinus). Pour tout réel x, le *cosinus* et le *sinus* de x, notés $\cos(x)$ et $\sin(x)$, ou $\cos x$ et $\sin x$, sont l'abscisse et l'ordonnée du point $M(x)$:

$$M(x) = (\cos x, \sin x).$$

On définit ainsi deux fonctions cos et sin sur $\mathbb{R}$.

Lire les Définitions 11.2 et 11.3. Le cercle a pour périmètre 2π : on enroule la droite réelle sur le cercle à partir de A, les réels positifs dans le sens trigonométrique, les réels négatifs dans l'autre sens, et l'on revient au même point tous les 2π.

Le Point $M(x)$, Vu sur le Cercle



Le point $M(x)$ a pour abscisse $\cos x$ et pour ordonnée $\sin x$ (Définition 11.3).

Théorème 11.1 (Premières Propriétés). Pour tout réel x :

(i) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$: les fonctions cos et sin sont *périodiques* de période 2π ;

(ii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

(iii) $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Preuve. (i) Par la Définition 11.2 (iii), $M(x + 2k\pi) = M(x)$: les deux points ont les mêmes coordonnées. (ii) Le point $M(x)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1, et le repère est orthonormé, donc $OM(x)^2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. (iii) Par (ii), $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \leq 1$, donc $|\cos x| \leq 1$; de même pour $\sin x$.

Ce qu'on Lit sur le Cercle

Théorème 11.2 (Lecture sur le Cercle). Les propriétés suivantes, lues sur le cercle, sont admises.

(i) $M(0) = A = (1,0)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$, $M(\pi) = (-1,0)$ et $M\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0,-1)$: un quart, une moitié et trois quarts du cercle.

(ii) Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, les deux coordonnées de $M(x)$ sont strictement positives.

(iii) Pour $0 \leq x \leq \pi$, l'angle géométrique $\widehat{AOM}(x)$ mesure x radians.

(iv) Pour tout réel x : la symétrie d'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$ envoie $M(x)$ sur $M(-x)$; la symétrie de centre O l'envoie sur $M(x+\pi)$; la symétrie d'axe $\left(O, \overrightarrow{v}\right)$ l'envoie sur $M(\pi - x)$; la symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$ l'envoie sur $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Lire le théorème. Une symétrie conserve les longueurs : elle envoie un arc sur un arc de même longueur, en renversant le sens de parcours, sauf la symétrie de centre O, qui le conserve.

11.2 Symétries et Valeurs Remarquables

Les symétries du cercle donnent les formules des angles associés, le signe du cosinus et du sinus, et les valeurs aux angles remarquables.

Angles Associés

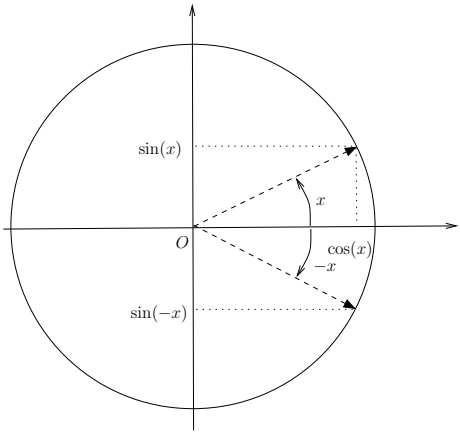
Théorème 11.3 (Angles Associés). Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x, & \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x, & \sin(\pi + x) &= -\sin x, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x, & \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, \\ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x, & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x. \end{aligned}$$

En particulier, la fonction cos est *paire* et la fonction sin est *impaire*.

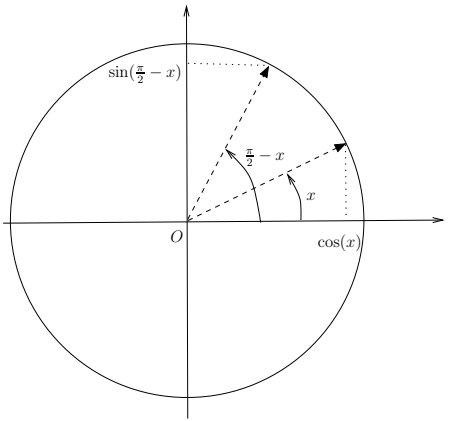
Preuve. Soit $M(x) = (a, b)$. Les quatre symétries du Théorème 11.2 (iv) envoient (a, b) sur $(a, -b)$, $(-a, -b)$, $(-a, b)$ et (b, a) : ce sont les coordonnées de $M(-x)$, $M(\pi + x)$, $M(\pi - x)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ce qui donne les quatre premières lignes (Définition 11.3). Pour la dernière, on applique la quatrième à $-x$, puis la parité : $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-x) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(-x) = \cos x$.

Parité, Vue sur le Cercle



Les points $M(x)$ et $M(-x)$ sont symétriques par rapport à l'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$: ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées (Théorème 11.3, première ligne).

Un Angle Associé, Vu sur le Cercle



Les points $M(x)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$: l'abscisse de l'un est l'ordonnée de l'autre (Théorème 11.3, quatrième ligne). Les autres lignes se lisent de même avec les symétries du Théorème 11.2 (iv) : mieux vaut les retrouver sur le cercle que les apprendre par cœur.

Signe du Cosinus et du Sinus

Théorème 11.4 (Signe).

(i) $\sin x > 0$ pour $0 < x < \pi$, et $\sin x < 0$ pour $\pi < x < 2\pi$.

(ii) $\cos x > 0$ pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, et $\cos x < 0$ pour $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Par la période 2π (Théorème 11.1 (i)), on en déduit le signe sur tout intervalle.

Preuve. (i) Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x > 0$ (Théorème 11.2 (ii)) ; $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (Théorème 11.2 (i)) ; pour $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, on a $0 < \pi - x < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin x = \sin(\pi - x) > 0$ (Théorème 11.3). Pour $\pi < x < 2\pi$, $0 < x - \pi < \pi$, donc $\sin x = \sin(\pi + (x - \pi)) = -\sin(x - \pi) < 0$.
(ii) Pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x > 0$ (Théorème 11.2 (ii)) ; $\cos 0 = 1$; pour $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\cos x = \cos(-x) > 0$ (parité). Pour $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x - \pi < \frac{\pi}{2}$, donc $\cos x = -\cos(x - \pi) < 0$.

Théorème 11.5 (Valeurs Remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

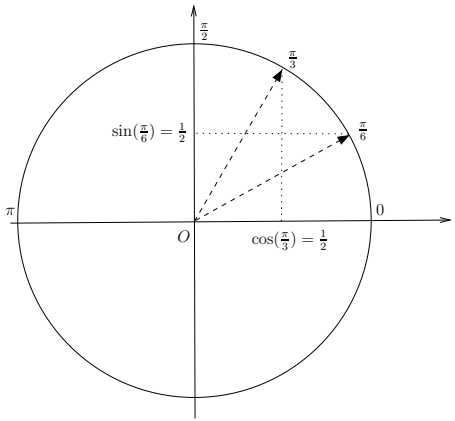
Preuve. Les colonnes 0, $\frac{\pi}{2}$ et π sont le Théorème 11.2 (i).
Étape 1 : $\frac{\pi}{3}$. Soit $M = M\left(\frac{\pi}{3}\right) = (c, s)$. Le triangle OAM est isocèle ($OA = OM = 1$) et son angle en O mesure $\frac{\pi}{3}$, soit $60°$ (Théorème 11.2 (iii)) : il est équilatéral, donc $AM^2 = (c-1)^2 + s^2 = 1$. Comme $c^2 + s^2 = 1$ (Théorème 11.1 (ii)), il vient $2 - 2c = 1$, soit $c = \frac{1}{2}$, puis $s^2 = \frac{3}{4}$ et $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$, car $s > 0$ (Théorème 11.4 (i)).

Valeurs Remarquables : Fin de la Preuve

Étape 2 : $\frac{\pi}{6}$**.** Comme $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, le Théorème 11.3 donne $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Étape 3 : $\frac{\pi}{4}$**.** Comme $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, le Théorème 11.3 donne $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$. Avec le Théorème 11.1 (ii), $2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1$, et $\cos\frac{\pi}{4} > 0$ (Théorème 11.4 (ii)), donc $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Valeurs Remarquables, Vues sur le Cercle



Les points $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$: $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ (Théorème 11.5).

Exemple : Angles Associés

Exemple 11.1 (Angles Associés). Les Théorèmes 11.1, 11.3 et 11.5 donnent :

- $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
- $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, et $\cos\frac{13\pi}{4} = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11.3 Dérivées et Variations

Le cosinus et le sinus sont dérivables ; le signe de leurs dérivées donne leurs variations, et la parité et la période donnent leurs courbes.

Théorème 11.6 (Continuité et Dérivées). Ce théorème est admis.

(i) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [2]).

(ii) Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ (Théorème 4.2 du cours 4 [3]).

Corollaire 11.1 (Fonctions $\sin(ax+b)$ et $\cos(ax+b)$). Soient a et b deux réels. Les fonctions $x \mapsto \sin(ax+b)$ et $x \mapsto \cos(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x,

$$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b), \qquad (\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b).$$

Preuve. La fonction $x \mapsto ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée a ; on applique le Théorème 4.4 du cours 4 [3] et le Théorème 11.6 (ii).

Une Limite Remarquable

Théorème 11.7 (Limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Preuve. Comme $\sin 0 = 0$, le quotient $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ est le taux de variation de sin entre 0 et x. La fonction sin est dérivable en 0 (Théorème 11.6 (ii)), donc ce taux a pour limite $\sin'(0) = \cos 0 = 1$ (Définition 4.1 du cours 4 [3]).

Remarque 11.1 (Une Preuve Géométrique). On peut aussi comparer, pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, l'aire d'un triangle, celle d'un secteur et celle d'un autre triangle, ce qui donne $\sin x \leq x \leq \tan x$ (avec la tangente de la section 11.5), d'où $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$; la parité traite $x < 0$, et l'on conclut par le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 du cours 2 [1]), car $\cos x$ tend vers $\cos 0 = 1$ en 0 (Théorème 11.6 (i)). Cette preuve suppose connue l'aire d'un secteur de cercle ; elle n'est pas au programme. C'est elle qui permet, dans un cours plus avancé, de démontrer $\sin' = \cos$; la preuve du Théorème 11.7, qui utilise cette dérivée, ne le pourrait pas.

Théorème 11.8 (Sens de Variation).

(i) La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, de 1 à -1.

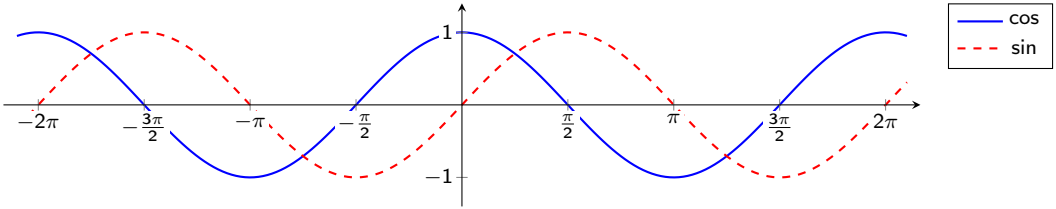
(ii) La fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de -1 à 1 ; elle est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Preuve. Les fonctions cos et sin sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ (Théorème 11.6). (i) Pour $0 < x < \pi$, $\cos' x = -\sin x < 0$ (Théorème 11.4 (i)). (ii) Pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $\sin' x = \cos x > 0$, et pour $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\cos x < 0$ (Théorème 11.4 (ii)). On conclut par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3] ; les valeurs aux bornes sont celles du Théorème 11.5 et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (parité).

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbes du Cosinus et du Sinus



Lire les courbes. Par la période 2π, il suffit d'étudier cos et sin sur un intervalle de longueur 2π ; par la parité, sur $[0, \pi]$ (Théorèmes 11.1 (i), 11.3 et 11.8). La courbe de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, celle de sin par rapport à l'origine ; et $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (Théorème 11.3) : la courbe de cos se déduit de celle de sin par une translation.

11.4 Équations Trigonométriques

Deux points du cercle de même abscisse, ou de même ordonnée, sont confondus ou symétriques : c'est la clé des équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$.

Équations $\cos x = \cos \alpha$ et $\sin x = \sin \alpha$

Théorème 11.9 (Équations). Soit α un réel. Pour tout réel x :

(i) $\cos x = \cos \alpha$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$;

(ii) $\sin x = \sin \alpha$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$.

Preuve. (i) Si $x = \pm\alpha + 2k\pi$, alors $\cos x = \cos(\pm\alpha) = \cos \alpha$ (Théorèmes 11.1 (i) et 11.3). Réciproquement, si $\cos x = \cos \alpha = c$, les points $M(x)$ et $M(\alpha)$ ont la même abscisse c, et leurs ordonnées s vérifient $s^2 = 1 - c^2$ (Théorème 11.1 (ii)) : elles sont égales ou opposées. Donc $M(x) = M(\alpha)$, ou $M(x)$ est le symétrique de $M(\alpha)$ par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$, c'est-à-dire $M(-\alpha)$ (Théorème 11.2 (iv)). On conclut par la Définition 11.2 (iii).
(ii) De même, deux points du cercle de même ordonnée sont confondus ou symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{v})$; le symétrique de $M(\alpha)$ est $M(\pi - \alpha)$.

Corollaire 11.2 (Équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$). Soit a un réel.

(i) Si $|a| > 1$, les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ n'ont pas de solution.

(ii) Si $|a| \leq 1$, il existe un unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$, et les solutions de $\cos x = a$ sont les réels $\alpha + 2k\pi$ et $-\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Si $|a| \leq 1$, il existe un unique $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = a$, et les solutions de $\sin x = a$ sont les réels $\beta + 2k\pi$ et $\pi - \beta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. (i) Théorème 11.1 (iii). (ii) La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, avec $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$ (Théorèmes 11.6 et 11.8) ; comme a est compris entre -1 et 1, le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 3.4 (i) et (ii) du cours 3 [2]) donne un unique α. On applique ensuite le Théorème 11.9 (i). (iii) De même, avec sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et le Théorème 11.9 (ii).

Exemple : Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$

Exemple 11.2 (Résoudre $\sin x = \frac{1}{2}$). Résolvons $\sin x = \frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi]$.

Étape 1 : un réel de référence. $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (Théorème 11.5), et $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Étape 2 : toutes les solutions. Par le Théorème 11.9 (ii), $\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Étape 3 : dans $[0, 2\pi]$. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \in [0, 2\pi]$ seulement pour $k = 0$, et de même pour $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$: les solutions sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

11.5 Fonction Tangente

La tangente est le quotient du sinus par le cosinus, là où celui-ci ne s'annule pas ; elle est impaire, de période π, et strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine.

Définition 11.4 (Fonction Tangente). Soit $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$. La fonction *tangente*, notée tan, est définie sur D par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Lire la définition. D est exactement l'ensemble des réels où cos ne s'annule pas : $\cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (Théorème 11.9 (i)), c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{2} + m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, car $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi$. Géométriquement, $\tan x$ est la pente de la droite $(OM(x))$.

Exemple 11.3 (Valeurs). $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $\tan \frac{\pi}{6} = \dfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\tan \frac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ (Théorème 11.5).

Propriétés de la Tangente

Théorème 11.10 (Propriétés de la Tangente).

(i) Pour tout $x \in D$, $x + \pi$ et $-x$ sont dans D, et $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\tan(-x) = -\tan x$: la fonction tan est *périodique* de période π, et *impaire*.

(ii) Sur chaque intervalle $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, la fonction tan est continue et dérivable, et

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(iii) La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty.$$

Preuve du Théorème 11.10

(i) Si $x+\pi$ ou $-x$ était de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, alors x le serait aussi ($x=\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi$, ou $x=\frac{\pi}{2}+(-k-1)\pi$). Par le Théorème 11.3, $\tan(x+\pi)=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\tan x$ et $\tan(-x)=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

(ii) Sur I_k, cos ne s'annule pas (lecture de la Définition 11.4). Par le Théorème 11.6, le Théorème 3.2 (ii) du cours 3 [2] et le Théorème 4.3 (iii) du cours 4 [3], tan est continue et dérivable sur I_k, et

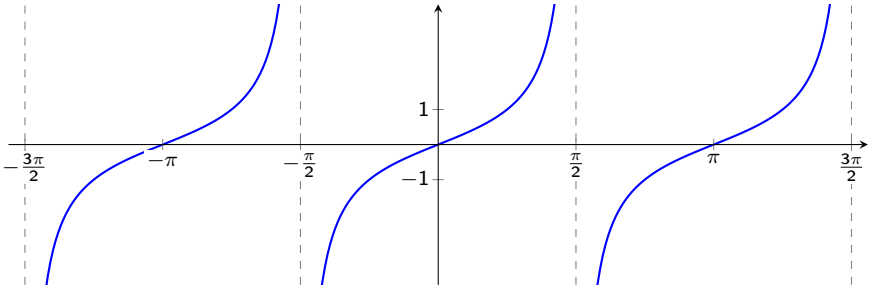
$$\tan' x=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x,$$

par le Théorème 11.1 (ii).

Preuve du Théorème 11.10 (iii)

Par (ii), $\tan' > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, d'où la stricte croissance (Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [3]). Quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ à gauche, $\sin x$ tend vers 1 et $\cos x$ vers 0 (continuité, Théorème 11.6 (i)), avec $\cos x > 0$ (Théorème 11.4 (ii)) ; le Théorème 2.3 (ii) du cours 2 [1], valable pour les limites à gauche, donne $+\infty$. En $-\frac{\pi}{2}$ à droite, $\sin x$ tend vers -1 et $\cos x$ vers 0 avec $\cos x > 0$, d'où $-\infty$.

Courbe de la Tangente



Les droites d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sont des asymptotes verticales (Définition 2.5 du cours 2 [1]) ; la courbe se répète tous les π (Théorème 11.10).

Équations $\tan x = a$

Théorème 11.11 (Équations $\tan x = \tan \alpha$ et $\tan x = a$).

(i) Soit $\alpha \in D$. Pour tout $x \in D$, $\tan x = \tan \alpha$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + k\pi$.

(ii) Pour tout réel a, il existe un unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \alpha = a$, et les solutions de $\tan x = a$ sont les réels $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. (i) Si $x = \alpha + k\pi$, $\tan x = \tan \alpha$ par le Théorème 11.10 (i), appliqué $|k|$ fois (à α si $k \geq 0$, à x si $k < 0$). Réciproquement, soit $\lambda = \frac{\cos x}{\cos \alpha}$: alors $\cos x = \lambda \cos \alpha$, et $\sin x = \cos x \tan x = \cos x \tan \alpha = \lambda \sin \alpha$. Donc $\overrightarrow{OM(x)} = \lambda \overrightarrow{OM(\alpha)}$; ces deux vecteurs ont pour norme 1, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$, c'est-à-dire $M(x) = M(\alpha)$ ou $M(x) = M(\alpha + \pi)$ (Théorème 11.2 (iv)). Par la Définition 11.2 (iii), $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \alpha + \pi + 2k\pi$, c'est-à-dire $x = \alpha + m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$.
(ii) La fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes (Théorème 11.10) : la Remarque 3.1 du cours 3 [2] donne un α, unique par stricte croissance. On applique ensuite (i), avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset D$.

Exemple : Résoudre $\tan x = \sqrt{3}$

Exemple 11.4 (Résoudre $\tan x = \sqrt{3}$). $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ (Exemple 11.3), et $\frac{\pi}{3} \in D$; par le Théorème 11.11 (i), les solutions sont les réels $\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0, 2\pi]$, $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq 2\pi$ donne $k = 0$ ou $k = 1$: les solutions sont $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

11.6 Formules d'Addition

Le cosinus et le sinus d'une somme s'expriment avec ceux des deux termes ; on en déduit les formules de duplication.

Formules d'Addition

Théorème 11.12 (Formules d'Addition). Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Ce théorème est admis ici ; il sera démontré avec les nombres complexes (cours 12 [4]).

Corollaire 11.3 (Duplication). Pour tout réel a,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a, \qquad \sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Preuve. On prend $b = a$ dans le Théorème 11.12, puis on utilise $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ (Théorème 11.1 (ii)).

Exemple : une Somme de Cosinus et de Sinus

Exemple 11.5 (Écrire $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ avec un Seul Cosinus). Pour tout réel x, montrons que $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Étape 1 : mettre 2 en facteur. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$, et $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$.

Étape 2 : reconnaître un angle. $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$ (Théorème 11.5).

Étape 3 : conclure. Par le Théorème 11.12, $\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

À retenir

On retient la définition par le cercle, les angles associés, les valeurs remarquables, les variations, la tangente, les équations et les formules d'addition.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- $\cos x$ et $\sin x$ sont les coordonnées du point $M(x)$ du cercle trigonométrique ; les fonctions cos et sin sont de période 2π, et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (Définitions 11.2 et 11.3, Théorème 11.1).
- Angles associés, signes et valeurs remarquables se déduisent du cercle, par symétries et par le triangle équilatéral (Théorèmes 11.3 à 11.5).
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; cos décroît sur $[0, \pi]$, sin croît sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (Théorèmes 11.6 à 11.8).
- $\cos x = \cos \alpha \iff x = \pm\alpha + 2k\pi$; $\sin x = \sin \alpha \iff x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$; solutions seulement si $|a| \leq 1$ (Théorème 11.9, Corollaire 11.2).
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ sur D, de période π, impaire, $\tan' = 1 + \tan^2$; $\tan x = \tan \alpha \iff x = \alpha + k\pi$ (Définition 11.4, Théorèmes 11.10 et 11.11).
- $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$ et la duplication (Théorème 11.12, Corollaire 11.3).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.