Cours 12

Nombres Complexes

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

12 novembre 2026

Plan

Introduction

12.1 Ensemble des Nombres Complexes

12.2 Représentation Géométrique

12.3 Argument et Forme Exponentielle

12.4 Résolution d'Équations dans $\mathbb{C}$

12.5 Transformations du Plan

À retenir

Introduction

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. Les nombres complexes lui en donnent ; ils se calculent comme les réels, se représentent par les points du plan, et la multiplication y devient une affaire de modules et d'angles.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le cercle trigonométrique, le cosinus et le sinus (cours 11 [3]) ; le raisonnement par récurrence (cours 1 [1]) ; les puissances réelles (cours 6 [2]) ; les coordonnées d'un point et d'un vecteur dans un repère (cours 14 [4]).
- **Les objets :** l'ensemble $\mathbb{C}$, le conjugué, le module et les arguments d'un nombre complexe ; ses formes algébrique, trigonométrique et exponentielle ; l'affixe d'un point et d'un vecteur.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer dans $\mathbb{C}$, passer d'une forme à l'autre, démontrer les formules d'addition, résoudre une équation du second degré à coefficients réels et l'équation $z^n = a$, traduire une configuration ou une transformation du plan par un calcul sur les affixes.
- **Et ensuite :** les isométries et les similitudes du plan s'écrivent avec les nombres complexes (cours 20 à 22 [5, 6, 7]).

12.1 Ensemble des Nombres Complexes

On admet l'existence d'un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$, où -1 est un carré ; on y calcule comme dans $\mathbb{R}$, avec en plus le conjugué et le module.

Pourquoi de Nouveaux Nombres

L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$; elle en a une dans $\mathbb{Z}$, ensemble plus grand. De même, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, car un carré de réel est positif ; elle en a dans un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$.

Théorème 12.1 (Ensemble $\mathbb{C}$). On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés *nombres complexes*, tel que :

(i) $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$; il est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et suivent les mêmes règles de calcul : elles sont commutatives et associatives, la multiplication est distributive par rapport à l'addition, $0 + z = z$, $1 \times z = z$, et tout z a un opposé $-z$;

(ii) $\mathbb{C}$ contient un élément, noté i et appelé *unité imaginaire*, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;

(iii) tout nombre complexe s'écrit $x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels.

Lire le théorème. On ne compare pas deux nombres complexes par $<$ ou $\leq$: ces signes restent réservés aux réels.

Théorème 12.2 (Unicité de la Forme Algébrique). Soient x, y, x', y' des réels. Alors

$$x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y' \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$

En particulier, $x + \mathrm{i}y = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.

Preuve. Supposons $x + \mathrm{i}y = x' + \mathrm{i}y'$, soit $x - x' = \mathrm{i}(y' - y)$. Si $y \neq y'$, alors $\mathrm{i} = \dfrac{x - x'}{y' - y}$ serait un réel, de carré positif : impossible, car $\mathrm{i}^2 = -1$. Donc $y = y'$, puis $x - x' = 0$. La réciproque est immédiate.

Définition 12.1 (Parties Réelle et Imaginaire). Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe, avec x et y réels. Cette écriture est la *forme algébrique* de z ; x est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, et y sa *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$. Le nombre z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$; on dit que z est *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Somme et Produit

Théorème 12.3 (Somme et Produit). Soient $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels. Alors

$$z + z' = \left(x + x'\right) + \mathrm{i}\left(y + y'\right), \qquad z \times z' = \left(xx' - yy'\right) + \mathrm{i}\left(xy' + x'y\right).$$

Preuve. Par les règles de calcul du Théorème 12.1 (i) et par $\mathrm{i}^2 = -1$,

$$\left(x + \mathrm{i}y\right)\left(x' + \mathrm{i}y'\right) = xx' + \mathrm{i}xy' + \mathrm{i}yx' + \mathrm{i}^2yy' = \left(xx' - yy'\right) + \mathrm{i}\left(xy' + x'y\right).$$

La somme se traite de même.

Exemple 12.1 (Un Produit). $(2 + \mathrm{i})(1 - 3\mathrm{i}) = 2 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = 5 - 5\mathrm{i}$.

Lire le théorème. On calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en remplaçant i^2 par -1 ; les identités remarquables restent vraies.

Définition 12.2 (Conjugué, Module). Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$; le *module* de z est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Théorème 12.4 (Propriétés du Conjugué). Pour tous nombres complexes z et z' :

(i) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{\bar{z}} = z$;

(ii) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$ et $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$; z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$, imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$;

(iii) $z \times \bar{z} = |z|^2$; en particulier, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Preuve. Avec les notations du Théorème 12.3,
$\bar{z} \times \overline{z'} = (x - \mathrm{i}y)(x' - \mathrm{i}y') = (xx' - yy') - \mathrm{i}(xy' + x'y) = \overline{z \times z'}$; le reste de (i) et (ii) se lit sur les formes algébriques (Théorème 12.2). (iii) $z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2$, qui est nul si et seulement si $x = y = 0$.

Inverse et Produit Nul

Théorème 12.5 (Inverse, Produit Nul).

(i) Tout nombre complexe $z \neq 0$ a un unique *inverse*, c'est-à-dire un unique nombre complexe, noté $\frac{1}{z}$, tel que $z \times \frac{1}{z} = 1$; de plus, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, produit de $\bar{z}$ par le réel $\frac{1}{|z|^2}$.

(ii) Pour tous nombres complexes z et z' : si $z \times z' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Preuve. (i) Comme $z \neq 0$, $|z|^2$ est un réel non nul et $z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1$ (Théorème 12.4 (iii)). Si $zw = 1$, alors $w = w \times z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$: l'inverse est unique. (ii) Si $zz' = 0$ et $z \neq 0$, alors $z' = \frac{1}{z} \times z \times z' = 0$.

Lire le théorème. Le point (ii) est la règle du produit nul : elle sert à résoudre les équations, comme dans $\mathbb{R}$.

Quotient et Puissances

Définition 12.3 (Quotient, Puissances). Pour $z \neq 0$, le *quotient* de z' par z est $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$.

Pour un entier $n \geq 1$, z^n est le produit de n facteurs égaux à z ; $z^0 = 1$; pour $z \neq 0$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Exemple 12.2 (Un Quotient). On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur : $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{(1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{2} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

Exemple 12.3 (Puissances de i). $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, et $\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \dfrac{-\mathrm{i}}{1} = -\mathrm{i}$ (Théorème 12.5 (i)).

Lire la définition. Par les règles de calcul du Théorème 12.1 (i), les égalités $z^m z^n = z^{m+n}$, $(z^m)^n = z^{mn}$ et $(zz')^n = z^n z'^n$ restent vraies, comme dans $\mathbb{R}$, pour des entiers relatifs m et n et des nombres complexes non nuls.

Propriétés du Module

Théorème 12.6 (Propriétés du Module). Pour tous nombres complexes z et z' :

(i) $|\bar{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$; si z est réel, son module est sa valeur absolue ;

(ii) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$; pour tout entier $n \geq 0$, $|z^n| = |z|^n$;

(iii) si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$; de plus, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\bar{z}}$;

(iv) *inégalité triangulaire* : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Ce point est admis.

Preuve. (i) se lit sur la Définition 12.2, avec $\sqrt{x^2} = |x|$. (ii) Par le Théorème 12.4 (i) et (iii),

$$\left|zz'\right|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\bar{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \left|z'\right|^2,$$

et deux réels positifs de même carré sont égaux ; le cas de z^n s'en déduit de proche en proche. (iii) Par (ii), $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = |1| = 1$, puis $\left|\frac{z'}{z}\right| = |z'| \times \left|\frac{1}{z}\right|$. De même, $\bar{z} \times \overline{1/z} = \overline{1} = 1$, donc $\overline{1/z} = \frac{1}{\bar{z}}$, puis on multiplie par $\overline{z'}$.

12.2 Représentation Géométrique

Un nombre complexe est repéré par deux réels, comme un point du plan :
on calcule alors des longueurs et on décrit des figures avec les affixes.

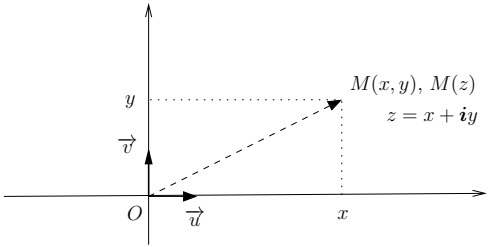
Affixe d'un Point, Affixe d'un Vecteur

Définition 12.4 (Affixe). Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du cours 11 [3]. Soient x et y deux réels et $z = x + \mathrm{i}y$.

(i) Le point M de coordonnées (x, y) est le *point d'affixe* z, et z est l'*affixe* de M.

(ii) Le vecteur $x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ est le *vecteur d'affixe* z, et z est son *affixe*.

Par les Théorèmes 12.1 (iii) et 12.2, tout nombre complexe est l'affixe d'un point et d'un seul, d'un vecteur et d'un seul ; le plan, ainsi repéré, est appelé *plan complexe*. Les points d'affixe réelle forment l'axe $(O, \overrightarrow{u})$, appelé *axe réel* ; ceux d'affixe imaginaire pure forment l'axe $(O, \overrightarrow{v})$, appelé *axe imaginaire*.



Le point M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$.

Théorème 12.7 (Affixes et Géométrie). Soient A, B et M trois points d'affixes a, b et z.

(i) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b-a$; la somme de deux vecteurs a pour affixe la somme de leurs affixes, et $k\overrightarrow{w}$ a pour affixe k fois celle de $\overrightarrow{w}$, pour tout réel k.

(ii) $AB = |b-a|$; en particulier, $OM = |z|$.

(iii) Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2}$.

(iv) Le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe réel ; le point d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à O.

Preuve. Notons (x_A, y_A) et (x_B, y_B) les coordonnées de A et B. On utilise les formules du cours 14 [4] sur les coordonnées. (i) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$, donc pour affixe $(x_B - x_A) + \mathrm{i}\,(y_B - y_A) = b - a$; de même pour la somme et le produit par k. (ii) Le repère étant orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = |b-a|$. (iii) Le milieu a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$. (iv) Si M a pour coordonnées (x, y), ces symétriques ont pour coordonnées $(x, -y)$ et $(-x, -y)$.

Théorème 12.8 (Cercle et Médiatrice). Soient A et B deux points d'affixes a et b.

(i) Pour tout réel $R > 0$, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - a| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.

(ii) Si $A \neq B$, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - a| = |z - b|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Preuve. Pour le point M d'affixe z, $|z - a| = AM$ et $|z - b| = BM$ (Théorème 12.7 (ii)). Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points M tels que $AM = R$; la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $AM = BM$.

Exemple 12.4 (Parallélogramme, Triangle Équilatéral). Soient A, B, C, D quatre points d'affixes a, b, c, d.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, c'est-à-dire $b - a = c - d$ (Théorème 12.7 (i) et Définition 12.4).
- Si A, B, C sont distincts, le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $AB = BC = CA$, c'est-à-dire $|b - a| = |c - b| = |a - c|$.

12.3 Argument et Forme Exponentielle

Un nombre complexe non nul est repéré par son module et par un angle. Sous cette forme, multiplier revient à multiplier les modules et à ajouter les angles ; on en tire les formules d'addition.

Définition 12.5 (Notation $e^{i\theta}$). Pour tout réel θ, on note

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

C'est une notation : l'exponentielle du cours 6 [2] n'est définie que pour les réels. Le Théorème 12.13 justifiera ce choix.

Théorème 12.9 (Nombres Complexes de Module 1).

(i) Pour tout réel θ, $e^{i\theta}$ est l'affixe du point $M(\theta)$ du cercle trigonométrique (Définition 11.2 du cours 11 [3]), et $\left|e^{i\theta}\right| = 1$.

(ii) Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $e^{i\theta}$, avec θ réel.

(iii) Pour tous réels θ et θ' : $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.

Preuve. (i) $M(\theta)$ a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$, et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (Définition 11.3 et Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [3]). (ii) Si $z = x + iy$ est de module 1, alors $x^2 + y^2 = 1$: le point de coordonnées (x, y) est sur le cercle trigonométrique, c'est donc un point $M(\theta)$ (Définition 11.2 (i) du cours 11 [3]), et $z = \cos\theta + i\sin\theta$. (iii) Par le Théorème 12.2, $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ équivaut à $M(\theta) = M(\theta')$, puis on applique la Définition 11.2 (iii) du cours 11 [3].

Définition 12.6 (Argument). Soit z un nombre complexe non nul. Le nombre $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1 (Théorème 12.6) : il s'écrit $e^{i\theta}$ (Théorème 12.9 (ii)). On appelle *argument* de z tout réel θ tel que

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}.$$

Si θ est un argument de z, les arguments de z sont les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Théorème 12.9 (iii)) ; on écrit $\arg(z) = \theta \ [2\pi]$. Pour deux réels, $\theta = \theta' \ [2\pi]$, qui se lit *modulo* 2π, signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$. Le nombre 0 n'a pas d'argument.

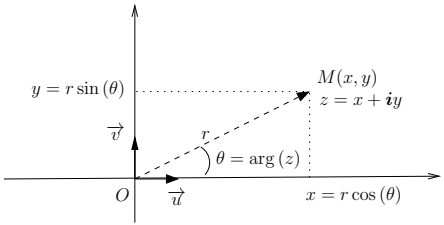
Théorème 12.10 (Formes Trigonométrique et Exponentielle). Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, avec x et y réels.

(i) Si θ est un argument de z et $r = |z|$, alors $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, *forme trigonométrique* de z, et $z = re^{i\theta}$, *forme exponentielle* de z ; de plus, $\cos\theta = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{|z|}$.

(ii) Réciproquement, si $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel, alors $r = |z|$ et θ est un argument de z.

(iii) Pour $r > 0$, $r' > 0$ et θ, θ' réels : $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' \ [2\pi]$.

Preuve du Théorème 12.10. (i) est la Définition 12.6, avec le Théorème 12.2 pour $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. (ii) Par les Théorèmes 12.6 (ii) et 12.9 (i), $|z| = |r| \times \left|e^{\mathrm{i}\theta}\right| = r$, donc $z = |z|\, e^{\mathrm{i}\theta}$. (iii) Si $re^{\mathrm{i}\theta} = r'e^{\mathrm{i}\theta'}$, alors $r = r'$ par (ii), puis $e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta'}$, et on applique le Théorème 12.9 (iii) ; la réciproque en résulte aussi.



Module r et argument θ de z.

Lire la définition. Soit M le point d'affixe $z \neq 0$. Alors $OM = |z|$, et on admet qu'un argument de z est une mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$, ce qui prolonge la Définition 11.2 du cours 11 [3].

Exemple 12.5 (Forme Exponentielle de $1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$). $\left|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2$, donc un argument θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$: $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$ convient (Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [3]), et $1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 2e^{-\mathrm{i}\pi/3}$.

Théorème 12.11 (Propriété de la Corde). Pour tous réels a et b, la distance des points $M(a)$ et $M(b)$ du cercle trigonométrique est égale à celle des points $M(a-b)$ et $M(0)$:

$$\left|e^{ia} - e^{ib}\right| = \left|e^{i(a-b)} - 1\right|.$$

Ce théorème est admis : on passe de $M(b)$ à $M(a)$ comme de $M(0)$ à $M(a-b)$, en parcourant sur le cercle un arc de même longueur dans le même sens, et deux tels arcs ont des cordes de même longueur.

Théorème 12.12 (Formules d'Addition). Pour tous réels a et b :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \qquad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

C'est le Théorème 11.12 du cours 11 [3], qui y était admis. Avec $b = a$, on retrouve les formules de duplication (Corollaire 11.3 du cours 11 [3]).

Formules d'Addition : Preuve du Théorème 12.12

Étape 1 : $\cos(a-b)$**.** Par la Définition 12.2 et le Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [3],

$$\left|e^{ia}-e^{ib}\right|^2=(\cos a-\cos b)^2+(\sin a-\sin b)^2=2-2(\cos a\cos b+\sin a\sin b),$$

$$\left|e^{i(a-b)}-1\right|^2=(\cos(a-b)-1)^2+\sin^2(a-b)=2-2\cos(a-b).$$

Ces deux nombres sont égaux (Théorème 12.11), d'où $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

Étape 2 : $\cos(a+b)$**.** On remplace b par $-b$ dans l'étape 1 ; comme $\cos(-b)=\cos b$ et $\sin(-b)=-\sin b$ (Théorème 11.3 du cours 11 [3]), on obtient
$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

Étape 3 : les sinus. Par le Théorème 11.3 du cours 11 [3] puis l'étape 1, appliquée à $\frac{\pi}{2}-a$ et b,

$$\begin{aligned}\sin(a+b)&=\cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)-b\right)=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\cos b+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-a\right)\sin b\\&=\sin a\cos b+\cos a\sin b.\end{aligned}$$

On remplace enfin b par $-b$ pour obtenir $\sin(a-b)$.

Calculer avec $e^{i\theta}$

Théorème 12.13 (Propriétés de $e^{i\theta}$). Pour tous réels θ et θ' et tout entier relatif n :

(i) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;

(ii) $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;

(iii) *formule de Moivre* : $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, c'est-à-dire $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$;

(iv) *formules d'Euler* : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Lire le théorème. Le point (i) est la règle $e^x e^y = e^{x+y}$ de l'exponentielle réelle (Théorème 6.2 du cours 6 [2]) : c'est ce qui justifie la notation $e^{i\theta}$. Il réunit en une seule égalité les deux formules d'addition de $\cos(\theta + \theta')$ et de $\sin(\theta + \theta')$.

Propriétés de $e^{i\theta}$: Preuve

Preuve du Théorème 12.13. (i) Par les Théorèmes 12.3 et 12.12,

$$e^{i\theta}e^{i\theta'} = \left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right) = \cos\left(\theta+\theta'\right) + i\sin\left(\theta+\theta'\right).$$

(ii) Par (i), $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i0} = 1$, donc $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; et $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$ (Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [3]). Le quotient s'obtient par (i).

(iii) Pour $n \geq 0$, par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) : $\left(e^{i\theta}\right)^0 = 1 = e^{i0}$, et si $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, alors $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$ par (i). Pour $n < 0$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = \frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^{-n}} = \frac{1}{e^{-in\theta}} = e^{in\theta}$ par (ii).

(iv) Par (ii), $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$.

Exemple 12.6 (Une Puissance). $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$; par la formule de Moivre, $(1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8 e^{i8\pi/4} = 16e^{i2\pi} = 16$.

Théorème 12.14 (Propriétés des Arguments). Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et n un entier relatif.

(i) $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$.

(ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

(iii) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.

(iv) z est réel si et seulement si ses arguments sont de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; z est imaginaire pur si et seulement s'ils sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ces égalités signifient : si θ et θ' sont des arguments de z et z', alors $\theta + \theta'$ est un argument de zz', etc.

Preuve. Écrivons $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r = |z|$ et $r' = |z'|$. Par le Théorème 12.13, $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, $z^n = r^n e^{in\theta}$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$, $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$, $\bar{z} = re^{-i\theta}$ et, comme $e^{i\pi} = -1$, $-z = re^{i(\theta+\pi)}$; on conclut par le Théorème 12.10 (ii). (iv) z est réel si et seulement si $\sin\theta = 0$, imaginaire pur si et seulement si $\cos\theta = 0$; on conclut par le Théorème 11.9 du cours 11 [3].

Théorème 12.15 (Angle de Deux Vecteurs). Soient A, B, C, D des points d'affixes a, b, c, d, avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\dfrac{d-c}{b-a}$.

Ce théorème repose sur deux faits admis : les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ sont les arguments de l'affixe de $\overrightarrow{w}$, pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul ; et la relation de Chasles des angles orientés : les mesures de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ sont les réels $\alpha' - \alpha$, où α et α' sont des mesures de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w'}\right)$. On conclut par le Théorème 12.14 (ii) : les arguments de $\dfrac{d-c}{b-a}$ sont les différences d'un argument de $d-c$ et d'un argument de $b-a$, affixes de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Lire le théorème. Les affixes se lisent de droite à gauche : dans $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$, on trouve D, C puis B, A, comme dans $\dfrac{d-c}{b-a}$.

Corollaire 12.1 (Alignement, Orthogonalité). Soient A, B, C trois points distincts d'affixes a, b, c.

(i) A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est réel.

(ii) Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est imaginaire pur.

Preuve. (i) A, B, C sont alignés si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $c - a = k(b - a)$ (cours 14 [4] et Théorème 12.7 (i)). (ii) Posons $q = \frac{c-a}{b-a}$. Alors $c - b = (q - 1)(b - a)$ et $|q - 1|^2 = (q - 1)(\bar{q} - 1) = |q|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}(q)$ (Théorème 12.4), donc, par les Théorèmes 12.6 et 12.7 (ii), $BC^2 = AB^2\left(|q|^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}(q)\right)$ et $AB^2 + AC^2 = AB^2\left(1 + |q|^2\right)$. Par le théorème de Pythagore et sa réciproque, le triangle est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(q) = 0$; si A, B, C sont alignés, q est réel et non nul, et aucune des deux conditions n'est remplie.

Exemple 12.7 (Un Triangle Rectangle). Pour $a = 1$, $b = 3 + \mathrm{i}$ et $c = 2\mathrm{i}$, $\frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(-1+2\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = \mathrm{i}$, imaginaire pur : le triangle ABC est rectangle en A.

12.4 Résolution d'Équations dans $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{C}$, toute équation du second degré à coefficients réels a des solutions, et l'équation $z^n = a$ en a exactement n.

Théorème 12.16 (Second Degré à Coefficients Réels). Soient a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$. Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions :

(i) si $\Delta > 0$, deux réels distincts, $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;

(ii) si $\Delta = 0$, un seul réel, $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$;

(iii) si $\Delta < 0$, deux nombres complexes non réels et conjugués, $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Exemple 12.8 (Discriminant Négatif). Pour $z^2 + 2z + 5 = 0$, $\Delta = -16$: les solutions sont $\dfrac{-2 \pm 4\mathrm{i}}{2}$, soit $-1 - 2\mathrm{i}$ et $-1 + 2\mathrm{i}$.

Lire le théorème. Dans $\mathbb{C}$, une équation du second degré à coefficients réels a toujours des solutions. Leur somme vaut $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $\dfrac{c}{a}$, en comptant deux fois z_0 si $\Delta = 0$.

Preuve du Théorème 12.16. Posons $\delta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta \geq 0$, et $\delta = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ si $\Delta < 0$: dans les deux cas, $\delta^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b}{2a} - \delta\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \delta\right).$$

Comme $a \neq 0$, ce produit est nul si et seulement si $z = -\dfrac{b}{2a} + \delta$ ou $z = -\dfrac{b}{2a} - \delta$ (Théorème 12.5 (ii)). Ces deux solutions sont égales si et seulement si $\delta = 0$, c'est-à-dire $\Delta = 0$. Si $\Delta < 0$, δ est imaginaire pur et non nul : les deux solutions ne sont pas réelles, et elles sont conjuguées.

Équation $z^n = a$

Théorème 12.17 (Équation $z^n = a$). Soient $n \geq 1$ un entier et a un nombre complexe non nul, de forme exponentielle $a = \rho e^{i\alpha}$, avec $\rho > 0$. L'équation $z^n = a$ a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Ici $\rho^{1/n}$ est l'unique réel $r > 0$ tel que $r^n = \rho$ (Définition 6.3 et Théorème 6.11 (ii) du cours 6 [2]).

Lire le théorème. Les solutions ont toutes le même module $\rho^{1/n}$, et l'on passe de l'une à la suivante en ajoutant $\frac{2\pi}{n}$ à l'argument : les points dont elles sont les affixes sont régulièrement répartis sur le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$ (Théorème 12.8).

Équation $z^n = a$: Preuve

Preuve du Théorème 12.17. Étape 1. Comme $a \neq 0$, une solution z est non nulle : on l'écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$. Alors $z^n = r^n e^{in\theta}$ (Théorème 12.13 (iii)) et, par le Théorème 12.10 (iii),

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff r^n = \rho \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n\theta = \alpha + 2k\pi \\ &\iff r = \rho^{1/n} \text{ et il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les nombres $z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Étape 2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z_{k+n} = z_k$, car les deux angles diffèrent de 2π : chaque solution est l'un des nombres $z_0, \ldots, z_{n-1}$. Ceux-ci sont distincts : pour $0 \leq k < l \leq n-1$, les angles de z_k et z_l diffèrent de $\frac{2(l-k)\pi}{n}$, qui est strictement compris entre 0 et 2π, donc n'est pas un multiple de 2π (Théorème 12.10 (iii)).

Équation $z^n = a$: Exemple

Exemple 12.9 (Résoudre $z^3 = 8\mathrm{i}$). Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8\mathrm{i}$.

Étape 1 : forme exponentielle. $|8\mathrm{i}| = 8$ et $8\mathrm{i} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8e^{\mathrm{i}\pi/2}$.

Étape 2 : solutions. Par le Théorème 12.17, avec $n = 3$, $\rho = 8$, $\rho^{1/3} = 2$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les solutions sont

$$z_k = 2e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \quad k \in \{0,1,2\}, \qquad \text{soit} \qquad z_0 = 2e^{\mathrm{i}\pi/6}, \quad z_1 = 2e^{\mathrm{i}5\pi/6}, \quad z_2 = 2e^{\mathrm{i}3\pi/2}.$$

Étape 3 : formes algébriques. Par les Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [3],

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad z_2 = -2\mathrm{i}.$$

Lire l'exemple. Les trois points d'affixes z_0, z_1, z_2 sont sur le cercle de centre O et de rayon 2 (Théorème 12.8), et l'on passe de l'un au suivant en ajoutant $\frac{2\pi}{3}$ à l'argument : ils forment un triangle équilatéral.

12.5 Transformations du Plan

Une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ déplace les points du plan. Les translations, les homothéties, les rotations et une symétrie s'écrivent par des formules simples sur les affixes.

Écriture Complexe d'une Transformation

Définition 12.7 (Application du Plan Associée). Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. L'*application du plan associée* à f envoie le point M d'affixe z sur le point M' d'affixe $z' = f(z)$; l'égalité $z' = f(z)$ est son *écriture complexe*. On réserve le mot *transformation* au cas où tout point du plan est l'image d'un point et d'un seul.

Théorème 12.18 (Écritures Complexes Usuelles). Soient Ω un point d'affixe ω, $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe t, k un réel non nul et θ un réel. On note z et z' les affixes de M et de son image M' ; les définitions sont celles des cours 20 à 22 [5, 6, 7].

(i) *Translation de vecteur* $\overrightarrow{w}$, définie par $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$: $z' = z + t$.

(ii) *Homothétie de centre* Ω *et de rapport* k, définie par $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$: $z' - \omega = k(z - \omega)$.

(iii) *Rotation de centre* Ω *et d'angle* θ, définie par : l'image de Ω est Ω ; pour $M \neq \Omega$, $\Omega M' = \Omega M$ et θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

(iv) *Symétrie par rapport à l'axe réel* : $z' = \bar{z}$.

Écritures Complexes : Preuve et Exemple

Preuve du Théorème 12.18. (i) et (ii) Par le Théorème 12.7 (i), $\overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $k\overrightarrow{\Omega M}$ ont pour affixes $z' - z$, $z' - \omega$ et $k(z - \omega)$, et deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont la même affixe (Définition 12.4).
(iii) Si $M = \Omega$, alors $z = \omega$ et la formule donne $z' = \omega$. Si $M \neq \Omega$, alors $M' \neq \Omega$, et les deux conditions s'écrivent $|z' - \omega| = |z - \omega|$ (Théorème 12.7 (ii)) et « θ est un argument de $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ » (Théorème 12.15) : elles disent que $\dfrac{z' - \omega}{z - \omega}$ est de module 1 et d'argument θ, c'est-à-dire qu'il est égal à $e^{i\theta}$ (Théorèmes 12.6 (iii) et 12.10).
(iv) C'est le Théorème 12.7 (iv).

Exemple 12.10 (Reconnaître une Transformation).

- $z' = iz$: comme $i = e^{i\pi/2}$, c'est l'écriture de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
- $z' = z + 2 - i$: c'est la translation de vecteur d'affixe $2 - i$.
- $z' = 3z - 2$: on cherche le point fixe, $\omega = 3\omega - 2$, soit $\omega = 1$; alors $z' - 1 = 3(z - 1)$: c'est l'homothétie de centre le point d'affixe 1 et de rapport 3.

À retenir

On retient les trois écritures d'un nombre complexe, les règles de calcul sur les modules et les arguments, et leur traduction géométrique.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Tout nombre complexe s'écrit de façon unique $z = x + \mathrm{i}y$, avec x, y réels et $\mathrm{i}^2 = -1$; $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z\bar{z} = |z|^2$ et, pour $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (Théorèmes 12.1 à 12.6).
- Affixes : $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$, $AB = |b - a|$; cercle $|z - a| = R$, médiatrice $|z - a| = |z - b|$ (Théorèmes 12.7 et 12.8).
- Pour $z \neq 0$: $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r = |z|$ et θ un argument de z, défini à $2k\pi$ près (Définitions 12.5 et 12.6, Théorème 12.10).
- Formules d'addition, démontrées par la propriété de la corde ; $e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$, formules de Moivre et d'Euler (Théorèmes 12.11 à 12.13).
- Le module d'un produit est le produit des modules, un argument d'un produit est la somme des arguments ; l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ se lit sur $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorèmes 12.6, 12.14, 12.15).
- Second degré à coefficients réels : si $\Delta < 0$, deux solutions conjuguées $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$; pour $n \geq 1$ et a complexe non nul, $z^n = a$ a n solutions (Théorèmes 12.16 et 12.17).
- Translation $z' = z + t$, homothétie $z' - \omega = k(z - \omega)$, rotation $z' - \omega = e^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$, symétrie d'axe réel $z' = \bar{z}$ (Théorème 12.18).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.