Cours 13

Équations Différentielles

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

13 novembre 2026

Plan

Introduction

13.1 Équations et Solutions

13.2 Équation $y' = ay$

13.3 Équation $y' = ay + b$

13.4 Équation $y' = ay + g$

13.5 Équation $y'' + \omega^2 y = 0$

À retenir

Introduction

Une équation différentielle a pour inconnue une fonction, et relie cette fonction à ses dérivées. On résout ici les équations les plus simples : elles décrivent une croissance exponentielle, un retour à l'équilibre ou une oscillation.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les limites (cours 2 [1]) ; la continuité (cours 3 [2]) ; les dérivées et le sens de variation (cours 4 [3]) ; la fonction exponentielle (cours 6 [4]) ; les primitives (cours 9 [5]) ; le cosinus, le sinus et les formules d'addition (cours 11 [6]).
- **Les objets :** une équation différentielle, ses solutions sur un intervalle, une condition initiale.
- **Ce qu'on saura faire :** résoudre $y' = g$, $y' = ay$, $y' = ay + b$ et $y'' + \omega^2 y = 0$, résoudre $y' = ay + g$ quand on connaît une solution particulière, et trouver la solution qui vérifie une ou deux conditions initiales.
- **Et ensuite :** ces équations sont celles de la désintégration radioactive, de la charge d'un condensateur ou du mouvement d'un ressort, en physique.

13.1 Équations et Solutions

On précise ce qu'est une solution : une fonction dérivable sur un intervalle, qui vérifie l'équation en chaque point. Le cas le plus simple, $y' = g$, est celui des primitives.

Équation Différentielle

Définition 13.1 (Équation Différentielle, Solution). Soit I un intervalle non réduit à un point.

(i) Une *équation différentielle* est une égalité qui relie une fonction inconnue, notée y, et ses dérivées y', y''... Son *ordre* est l'ordre de la plus haute dérivée qui y figure. On n'écrit pas toujours la variable : $y' = 2y$ signifie $y'(x) = 2y(x)$.

(ii) Une *solution sur I* d'une équation d'ordre 1 (resp. 2) est une fonction f dérivable (resp. deux fois dérivable) sur I telle que l'égalité soit vraie, f remplaçant y, pour tout $x \in I$.

(iii) *Résoudre* l'équation sur I, c'est déterminer toutes ses solutions sur I.

Exemple 13.1 (Vérifier une Solution). La fonction $f(x) = e^{2x}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = 2y$: elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 2e^{2x} = 2f(x)$ pour tout réel x (Théorème 6.6 du cours 6 [4]). Ce n'est pas la seule : $3e^{2x}$ en est une autre.

Remarque 13.1 (L'Intervalle est Indispensable). Les théorèmes de cette leçon reposent sur le fait qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [3]) ; c'est faux sur une réunion d'intervalles (Remarque 9.1 du cours 9 [5]).

L'Équation $y' = g$

Théorème 13.1 (Équation $y' = g$). Soit g une fonction continue sur un intervalle I, et G une primitive de g sur I.

(i) Les solutions sur I de l'équation $y' = g$ sont exactement les fonctions $x \mapsto G(x) + c$, où c est un réel.

(ii) Pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, il en existe une seule qui vérifie $y(x_0) = y_0$.

Preuve. Une solution sur I de $y' = g$ est, par la Définition 13.1, une primitive de g sur I (Définition 9.1 du cours 9 [5]). Une telle primitive G existe (Théorème 9.5 du cours 9, admis), et les primitives sont les $G + c$ (Théorème 9.1 du cours 9 [5]) : c'est (i). Le point (ii) est le Corollaire 9.1 du cours 9 [5].

Exemple 13.2 (Une Primitive). Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = \cos x$ sont les fonctions $x \mapsto \sin x + c$, c réel, par le Théorème 13.1 : cos est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [2]), et sin en est une primitive sur $\mathbb{R}$ (Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Comme $\sin 0 + c = c$, celle qui vaut 1 en 0 est $\sin x + 1$, et c'est la seule (Théorème 13.1 (ii)).

Deux Exemples : $y' = a$ et $y'' = a$

Exemple 13.3 (Les Équations $y' = a$ et $y'' = a$). Soit a un réel.

Étape 1 : $y' = a$. La fonction constante a est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]), et $x \mapsto ax$ en est une primitive (Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Par le Théorème 13.1, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = a$ sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$, b réel.

Deux Exemples : $y' = a$ et $y'' = a$ (Suite)

Étape 2 : $y'' = a$. Une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ est solution si et seulement si $z = y'$ est solution de $z' = a$, c'est-à-dire, par l'étape 1, si et seulement s'il existe un réel b tel que $y'(x) = ax + b$ pour tout x. La fonction $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]), et une primitive en est $x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + bx$ (Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9 [5]) ; par le Théorème 13.1, les solutions sont donc les fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + bx + c, \qquad b, c \in \mathbb{R}.$$

Ces fonctions sont bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde a (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [3]), comme l'exige la Définition 13.1. Ce sont des fonctions polynômes de degré au plus 2 ; si $a = 0$, ce sont les fonctions affines.

13.2 Équation $y' = ay$

Une fonction dont la dérivée est proportionnelle à elle-même est une exponentielle. La preuve est celle du Théorème 6.7 du cours 6 [4], qui caractérise la fonction exp.

Résolution de $y' = ay$

Théorème 13.2 (Équation $y' = ay$). Soient a un réel et I un intervalle (par exemple $\mathbb{R}$). Les solutions sur I de l'équation $y' = ay$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Preuve. *Ces fonctions sont solutions.* Par le Théorème 6.6 du cours 6 [4], avec $u(x) = ax$, et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [3], $x \mapsto ke^{ax}$ est dérivable sur I, de dérivée $kae^{ax} = a(ke^{ax})$.

Il n'y en a pas d'autre. Soit y une solution sur I, et $g(x) = y(x)\, e^{-ax}$. Par le Théorème 4.3 du cours 4 [3] et le Théorème 6.6 du cours 6 [4] avec $u(x) = -ax$, g est dérivable sur I, et

$$g'(x) = y'(x)\, e^{-ax} - ay(x)\, e^{-ax} = \big(y'(x) - ay(x)\big)\, e^{-ax} = 0$$

pour tout $x \in I$. Donc g est constante sur l'intervalle I (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [3]) : il existe un réel k tel que $y(x)\, e^{-ax} = k$, soit $y(x) = ke^{ax}$, pour tout $x \in I$ (Théorème 6.2 du cours 6 [4]).

Corollaire 13.1 (Condition Initiale). Soient a, x_0 et y_0 trois réels. L'équation $y' = ay$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(x_0) = y_0$ (une telle égalité est appelée *condition initiale*) : c'est

$$x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Preuve. Par le Théorème 13.2, une solution s'écrit ke^{ax}, et $ke^{ax_0} = y_0$ équivaut à $k = y_0 e^{-ax_0}$ (Théorème 6.2 du cours 6 [4]) ; alors $ke^{ax} = y_0 e^{a(x-x_0)}$. Cette fonction est donc la seule possible, et elle est solution par le Théorème 13.2.

Remarque 13.2 (La Fonction Exponentielle). Avec $a = 1$, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, la seule solution de $y' = y$ qui vaut 1 en 0 est exp : c'est le Théorème 6.7 du cours 6 [4].

Remarque 13.3 (En Physique). Le nombre $N(t)$ de noyaux d'un échantillon radioactif vérifie $N' = -\lambda N$, où $\lambda > 0$ est une constante : $N(t) = N(0)\, e^{-\lambda t}$.

Exemple : une Équation Homogène

Exemple 13.4 (Résoudre $y' + 3y = 0$). Résolvons $y' + 3y = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis cherchons la solution qui vaut 2 en 0.

Étape 1 : se ramener à $y' = ay$. L'équation s'écrit $y' = -3y$: c'est $y' = ay$ avec $a = -3$.

Étape 2 : appliquer le théorème. Par le Théorème 13.2, les solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x}$, k réel.

Étape 3 : la condition initiale. Par le Corollaire 13.1 avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$, la solution cherchée est $x \mapsto 2e^{-3x}$.

Lire le vocabulaire. L'équation $y' = ay$, qui s'écrit aussi $y' - ay = 0$, est dite *homogène* : le membre de droite est nul. Écrite $y' - ay = b$ (resp. $y' - ay = g(x)$), l'équation a pour *second membre* b (resp. $g(x)$) : on parle d'équation avec second membre constant (resp. général).

13.3 Équation $y' = ay + b$

Avec un second membre constant, on cherche d'abord une solution constante ; la différence entre deux solutions est solution de l'équation homogène.

Résolution de $y' = ay + b$

Théorème 13.3 (Équation $y' = ay + b$). Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay + b$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Preuve. La fonction constante $y_{\mathrm{p}} = -\dfrac{b}{a}$ est solution : $y'_{\mathrm{p}} = 0$ et $ay_{\mathrm{p}} + b = -b + b = 0$. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et $z = y - y_{\mathrm{p}}$. Alors z est dérivable, $z' = y'$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 (i) du cours 4 [3]) et $az = ay + b$; donc y est solution de $y' = ay + b$ si et seulement si z est solution de $z' = az$, c'est-à-dire, par le Théorème 13.2, si et seulement s'il existe un réel k tel que $z(x) = ke^{ax}$, soit $y(x) = ke^{ax} - \dfrac{b}{a}$, pour tout réel x.

Remarque 13.4 (Le Cas $a = 0$). Si $a = 0$, l'équation s'écrit $y' = b$; par l'Exemple 13.3, ses solutions sont les fonctions $x \mapsto bx + k$, k réel.

Corollaire 13.2 (Condition Initiale). Soient $a \neq 0$, b, x_0 et y_0 des réels. L'équation $y' = ay + b$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(x_0) = y_0$: c'est $x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

Preuve. Par la preuve du Théorème 13.3, y est une telle solution si et seulement si $z = y + \frac{b}{a}$ est solution de $z' = az$ et vérifie $z(x_0) = y_0 + \frac{b}{a}$; on conclut par le Corollaire 13.1.

Remarque 13.5 (En Physique). Si $a < 0$, alors ax tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (Théorème 2.2 (ii) du cours 2), donc e^{ax} tend vers 0 (Théorème 2.4 du cours 2 et Théorème 6.8 du cours 6 [4]), et toutes les solutions tendent vers $-\frac{b}{a}$ (Théorème 2.2 du cours 2 [1]) : c'est un retour à l'équilibre, comme la température d'un objet qui refroidit ou la tension d'un condensateur qui se charge.

Exemple : un Second Membre Constant

Exemple 13.5 (Résoudre $y' + 3y = 12$). Résolvons $y' + 3y = 12$ sur $\mathbb{R}$, puis cherchons la solution qui vaut 5 en 0.

Étape 1 : se ramener à $y' = ay + b$. L'équation s'écrit $y' = -3y + 12$, avec $a = -3 \neq 0$ et $b = 12$; $-\dfrac{b}{a} = 4$.

Étape 2 : appliquer le théorème. Par le Théorème 13.3, les solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{-3x} + 4$, k réel.

Étape 3 : la condition initiale. $ke^0 + 4 = 5$ donne $k = 1$; la solution cherchée est $x \mapsto e^{-3x} + 4$, la seule par le Corollaire 13.2.

13.4 Équation $y' = ay + g$

Quand le second membre est une fonction, la même méthode marche dès qu'on connaît une solution particulière ; l'énoncé la donne, ou indique sa forme.

Résolution de $y' = ay + g$

Théorème 13.4 (Équation $y' = ay + g$). Soient a un réel, g une fonction définie sur un intervalle I, et y_{p} une solution sur I de l'équation

$$y' = ay + g. \tag{E}$$

Les solutions sur I de (E) sont exactement les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + y_{\mathrm{p}}(x)$, $k \in \mathbb{R}$. On dit que y_{p} est une *solution particulière* de (E), et que $y' = ay$ est l'*équation homogène associée*.

Preuve. Soit y une fonction dérivable sur I, et $z = y - y_{\mathrm{p}}$, dérivable sur I (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [3]). Pour tout $x \in I$, $z'(x) - az(x) = (y'(x) - ay(x)) - (y_{\mathrm{p}}'(x) - ay_{\mathrm{p}}(x))$, et le second terme vaut $g(x)$. Donc y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution de $z' = az$ sur I, c'est-à-dire, par le Théorème 13.2, si et seulement s'il existe un réel k tel que $y(x) = ke^{ax} + y_{\mathrm{p}}(x)$ pour tout $x \in I$.

Condition Initiale et Solution Particulière

Corollaire 13.3 (Condition Initiale). Sous les hypothèses du Théorème 13.4, pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, (E) a une seule solution sur I qui vérifie $y(x_0) = y_0$: celle qui correspond à $k = (y_0 - y_p(x_0))\, e^{-ax_0}$.

Preuve. $ke^{ax_0} + y_p(x_0) = y_0$ équivaut à cette valeur de k (Théorème 6.2 du cours 6 [4]).

Remarque 13.6 (Chercher y_p de la Forme de g). On essaie une fonction de la même forme que g, à coefficients inconnus : un polynôme de même degré si g est un polynôme, $A\cos x + B\sin x$ si g est une combinaison de $\cos x$ et $\sin x$, etc. Il *suffit* de trouver des coefficients pour lesquels l'égalité est vraie pour tout x : on vérifie alors directement que la fonction trouvée est solution.

Exemple : un Second Membre Affine

Exemple 13.6 (Résoudre $y' - y = x + 3$). Résolvons $y' - y = x + 3$ sur $\mathbb{R}$, puis cherchons la solution qui vaut 3 en 0.

Étape 1 : une solution particulière. Essayons $y_{\mathrm{p}}(x) = Ax + B$, dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée A (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [3]) : $y'_{\mathrm{p}} - y_{\mathrm{p}} = A - Ax - B$. Il suffit que $-A = 1$ et $A - B = 3$, soit $A = -1$ et $B = -4$. Vérification : $y_{\mathrm{p}}(x) = -x - 4$ donne $-1 - (-x - 4) = x + 3$.

Étape 2 : toutes les solutions. L'équation s'écrit $y' = y + (x + 3)$; par le Théorème 13.4 avec $a = 1$, les solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^x - x - 4$, k réel.

Étape 3 : la condition initiale. $k - 4 = 3$ donne $k = 7$: la solution cherchée est $x \mapsto 7e^x - x - 4$, la seule par le Corollaire 13.3.

13.5 Équation $y'' + \omega^2 y = 0$

Une fonction dont la dérivée seconde est proportionnelle à elle-même, avec un coefficient négatif, oscille : c'est une combinaison de $\cos(\omega x)$ et de $\sin(\omega x)$.

Résolution de $y'' + \omega^2 y = 0$

Théorème 13.5 (Équation $y'' + \omega^2 y = 0$). Soit $\omega > 0$ un réel.

(i) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) Pour x_0, y_0 et y_1 réels, une seule solution vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$: c'est

$$x \mapsto y_0 \cos(\omega(x - x_0)) + \frac{y_1}{\omega} \sin(\omega(x - x_0)).$$

Lire le théorème. Il faut *deux* conditions initiales, la valeur et la dérivée en x_0 : en physique, la position et la vitesse de départ. Si $\omega = 0$, l'équation est $y'' = 0$, dont les solutions sont les fonctions affines (Exemple 13.3).

Preuve du Théorème 13.5 (1/3)

Étape 1 : des solutions. Soient α, β et c trois réels, et $f(x) = \alpha\cos(\omega x + c) + \beta\sin(\omega x + c)$. Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [6] et le Théorème 4.3 du cours 4 [3], f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$f'(x) = -\alpha\omega\sin(\omega x + c) + \beta\omega\cos(\omega x + c), \qquad f''(x) = -\omega^2 f(x).$$

Donc f est solution. Avec $c = 0$, ce sont les fonctions de (i) ; avec $c = -\omega x_0$, $\alpha = y_0$ et $\beta = \frac{y_1}{\omega}$, c'est la fonction de (ii), qui vaut y_0 en x_0 et dont la dérivée y vaut $\beta\omega = y_1$, car $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [6]).

Étape 2 : la différence de deux solutions est une solution. Si y et w sont solutions, $z = y - w$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $z'' + \omega^2 z = \left(y'' + \omega^2 y\right) - \left(w'' + \omega^2 w\right) = 0$ (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [3]).

Preuve du Théorème 13.5 (2/3)

Étape 3 : une solution nulle avec sa dérivée en un point est nulle. Soit z une solution, et $E(x) = (\omega z(x))^2 + (z'(x))^2$. Par le Théorème 4.3 du cours 4 [3], E est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$E'(x) = 2\omega^2 z(x) z'(x) + 2z'(x) z''(x) = 2z'(x)\left(z''(x) + \omega^2 z(x)\right) = 0.$$

Donc E est constante (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [3]). Si de plus $z(x_0) = z'(x_0) = 0$, alors $E = E(x_0) = 0$; une somme de deux carrés de réels nulle a ses deux termes nuls : $\omega z(x) = 0$, donc $z(x) = 0$ ($\omega \neq 0$), pour tout réel x.

Étape 4 : conclusion pour (ii). La fonction w de (ii) est solution (étape 1) et vérifie les deux conditions. Si y est une solution qui les vérifie aussi, $z = y - w$ est solution (étape 2), avec $z(x_0) = z'(x_0) = 0$; donc $z = 0$ (étape 3), soit $y = w$.

Preuve du Théorème 13.5 (3/3)

Étape 5 : conclusion pour (i). Les fonctions de (i) sont solutions (étape 1). Soit y une solution, et $w(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$ avec $\alpha = y(0)$ et $\beta = \frac{y'(0)}{\omega}$: w est solution, et $w(0) = y(0)$, $w'(0) = \beta\omega = y'(0)$ (étape 1, $c = 0$, et Théorème 11.5 du cours 11 [6]). Par l'étape 4 avec $x_0 = 0$, $y = w$.

Lire la preuve. Pour un ressort (Remarque 13.7), $\frac{1}{2}m(z')^2 + \frac{1}{2}kz^2 = \frac{m}{2}E$ est l'énergie mécanique : l'étape 3 dit qu'elle se conserve, et qu'un ressort lâché sans vitesse à sa position d'équilibre y reste.

Corollaire 13.4 (Amplitude et Phase). Soit $\omega > 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''+\omega^2 y = 0$ sont exactement les fonctions $x \mapsto A\cos(\omega x+\varphi)$, où $A \geq 0$ et φ sont des réels.

Preuve. Par le Théorème 11.12 du cours 11 [6],
$A\cos(\omega x+\varphi) = (A\cos\varphi)\cos(\omega x) + (-A\sin\varphi)\sin(\omega x)$: c'est une solution, par le Théorème 13.5 (i). Réciproquement, soit une solution $\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$. Si $\alpha=\beta=0$, on prend $A=0$ et $\varphi=0$. Sinon, soit $A=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}>0$: le point $\left(\frac{\alpha}{A},-\frac{\beta}{A}\right)$ est sur le cercle trigonométrique, car la somme des carrés de ses coordonnées vaut 1. C'est donc le point $M(\varphi)$ d'un réel φ (Définition 11.2 (i) du cours 11), et $\cos\varphi=\frac{\alpha}{A}$, $\sin\varphi=-\frac{\beta}{A}$ (Définition 11.3 du cours 11 [6]). Le calcul ci-dessus donne alors $A\cos(\omega x+\varphi)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$.

Remarque 13.7 (En Physique). Une masse m accrochée à un ressort de raideur k, sans frottement, a une position $x(t)$ qui vérifie $mx''=-kx$, soit $x''+\omega^2 x=0$ avec $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Le mouvement est une oscillation d'amplitude A et de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Exemple : un Oscillateur

Exemple 13.7 (Résoudre $y'' + 4y = 0$). Résolvons $y'' + 4y = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis cherchons la solution telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$, et écrivons-la sous la forme $A\cos(2x + \varphi)$.

Étape 1 : appliquer le théorème. C'est l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2$. Par le Théorème 13.5 (i), les solutions sont les fonctions $x \mapsto \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, α, β réels.

Étape 2 : les conditions initiales. Par le Théorème 13.5 (ii) avec $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $y_1 = 2$, la solution cherchée est $y(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$.

Étape 3 : amplitude et phase. $A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, et il faut $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ convient (Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [6]). Donc, par le Théorème 11.12 du cours 11 [6], comme dans la preuve du Corollaire 13.4,

$$y(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

À retenir

On retient la forme des solutions de chaque équation, et le nombre de conditions initiales qui fixent une solution.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Une solution sur un intervalle I est une fonction dérivable (deux fois pour une équation d'ordre 2) sur I qui vérifie l'équation en tout point de I (Définition 13.1).
- $y' = g$, g continue sur I : les primitives $G + c$ de g (Théorème 13.1).
- $y' = ay$: $y = ke^{ax}$; avec $y(x_0) = y_0$, $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$ (Théorème 13.2, Corollaire 13.1).
- $y' = ay + b$, $a \neq 0$: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, une seule solution avec $y(x_0) = y_0$ (Théorème 13.3, Corollaire 13.2).
- $y' = ay + g$: $y = ke^{ax} + y_{\mathrm{p}}$, où y_{p} est une solution particulière (Théorème 13.4, Corollaire 13.3).
- $y'' + \omega^2 y = 0$, $\omega > 0$: $y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) = A \cos(\omega x + \varphi)$, une seule solution avec $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ donnés (Théorème 13.5, Corollaire 13.4).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.