Cours 14

Vecteurs et Géométrie dans le Plan et l'Espace

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

13 novembre 2026

Plan

Introduction

14.1 Vecteurs

14.2 Colinéarité, Droites et Plans

14.3 Dans le Plan

14.4 Dans l'Espace

14.5 Repères Orthonormés

À retenir

Introduction

Un vecteur traduit un déplacement : une direction, un sens et une longueur. Avec les vecteurs, on calcule sur les figures ; avec un repère, on calcule sur des nombres, les coordonnées.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** la géométrie du collège (droites, plans, milieu d'un segment, droites perpendiculaires, théorème de Pythagore) ; la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues (voir aussi le cours 18 [3]).
- **Les objets :** les vecteurs, leur somme et leur produit par un réel ; la colinéarité et la coplanarité ; les bases, les repères et les coordonnées ; les droites et les plans décrits par un point et des vecteurs.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer des coordonnées, un milieu, une distance ; reconnaître des points alignés ou coplanaires ; écrire une représentation paramétrique ou une équation cartésienne d'une droite ; trouver l'intersection de deux droites du plan.
- **Et ensuite :** le produit scalaire et les équations de plans (cours 15 [2]) ; le plan complexe (cours 12 [1]) ; les isométries du plan (cours 20 [4]).

14.1 Vecteurs

On définit l'égalité de deux vecteurs par une condition sur des milieux, ce qui couvre le cas des points alignés. On admet ce qui fonde le calcul vectoriel, et on en déduit le milieu et le parallélogramme.

Vecteur

Les points sont ceux du plan, ou ceux de l'espace.

Définition 14.1 (Vecteur). Soient A, B, C, D quatre points.

(i) Aux points A et B, pris dans cet ordre, on associe le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$; A est son *origine*, B son *extrémité*.

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.

(iii) Le *vecteur nul* est $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}$; il ne dépend pas de A, car $[AB]$ et $[AB]$ ont le même milieu, d'où $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ par (ii).

(iv) La *norme* de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB ; on la note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Remarque 14.1 (Lire la Définition). Si A, B, C, D ne sont pas alignés, (ii) dit que $ABDC$ est un parallélogramme. Un vecteur non nul est donc déterminé par sa *direction* (celle de la droite (AB)), son *sens* (de A vers B) et sa *longueur* ; il ne dépend pas de son origine.

Somme et Produit par un Réel

Théorème 14.1 (Fondements du Calcul Vectoriel). Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Ce théorème est admis.

(i) Pour tout point A, il existe un point B et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

(ii) Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne dépend que de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et pas du point A choisi.

(iii) Deux vecteurs égaux ont la même norme : la norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$, ne dépend pas de son origine.

Définition 14.2 (Somme, Produit par un Réel). Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et t un réel.

(i) La *somme* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ du Théorème 14.1 (ii). Pour tous points A, B, C, on a donc la *relation de Chasles* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

(ii) Si $t = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $t\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Sinon, $t\overrightarrow{u}$ est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{u}$, de norme $|t|\left\|\overrightarrow{u}\right\|$, de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $t > 0$ et de sens contraire si $t < 0$.

(iii) L'*opposé* de $\overrightarrow{u}$ est $-\overrightarrow{u} = (-1)\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{v}\right)$.

Théorème 14.2 (Règles de Calcul). Ce théorème est admis. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tous réels s, t :

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;

(ii) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ et $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$;

(iii) $1\vec{u} = \vec{u}$ et $t(s\vec{u}) = (ts)\vec{u}$;

(iv) $(t+s)\vec{u} = t\vec{u} + s\vec{u}$ et $t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v}$.

On calcule donc avec les vecteurs comme avec les nombres : on peut regrouper, développer, et faire passer un terme d'un membre à l'autre en changeant son signe.

Remarque 14.2 (Points et Vecteurs). Les points forment le plan ou l'espace ; les vecteurs forment un autre ensemble, où l'on sait additionner et multiplier par un réel. Après le baccalauréat, on distingue le plan (ou l'espace) des points, dit *affine*, de celui des vecteurs, dit *vectoriel*. On ne confond pas un point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Définition 14.3 (Parallélogramme). Un quadrilatère $ABCD$ est un *parallélogramme* si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. La définition vaut aussi quand les quatre sommets sont alignés : on parle alors de parallélogramme *aplati*.

Théorème 14.3 (Opposé, Milieu, Parallélogramme). Soient A, B, C, D, I des points, $\overrightarrow{u}$ un vecteur et t un réel.

(i) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $A = B$.

(ii) $t\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $t = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

(iii) I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(iv) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Preuve du Théorème 14.3

Preuve. (i) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$; en ajoutant $-\overrightarrow{AB}$ aux deux membres (Théorème 14.2), $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Par la Définition 14.1 (ii), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA}$ si et seulement si $[AA]$ et $[BA]$ ont le même milieu, c'est-à-dire si A est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire si $A = B$.

(ii) Si $t = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, $t\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ par la Définition 14.2 (ii). Sinon, $\left\|t\overrightarrow{u}\right\| = |t| \left\|\overrightarrow{u}\right\| > 0$, car un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ a $A \neq B$ par (i), donc une norme $AB > 0$; ainsi $t\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

(iii) Par la Définition 14.1 (ii), $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ si et seulement si $[AB]$ et $[II]$ ont le même milieu, c'est-à-dire si I est le milieu de $[AB]$. Si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{AI}$. Inversement, si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$.

(iv) Par la Définition 14.1 (ii), $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, c'est-à-dire si $ABCD$ est un parallélogramme (Définition 14.3) ; de même, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $[AC]$ et $[DB]$ ont le même milieu.

Exemple : la Règle du Parallélogramme

Exemple 14.1 (Règle du Parallélogramme). Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Étape 1 : remplacer un vecteur par un vecteur égal. Par le Théorème 14.3 (iv), $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Étape 2 : la relation de Chasles. Donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Définition 14.2 (i)).

Lecture. Pour construire la somme de deux vecteurs de même origine A, on complète le parallélogramme : la somme est portée par la diagonale issue de A.

Exemple 14.2 (Simplifier une Somme). Pour tous points A, B, C, D :

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$

par le Théorème 14.3 (i), puis deux fois la relation de Chasles.

14.2 Colinéarité, Droites et Plans

Deux vecteurs colinéaires dirigent une même droite ; trois vecteurs coplanaires sont parallèles à un même plan. On décrit une droite par un point et un vecteur, un plan par un point et deux vecteurs.

Définition 14.4 (Combinaison Linéaire, Famille Libre). Soient $\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n$ des vecteurs.

(i) Une *combinaison linéaire* de ces vecteurs est un vecteur $t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n$, où $t_1, \ldots, t_n$ sont des réels.

(ii) La famille $\left(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n\right)$ est *libre* si la seule combinaison linéaire nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls : $t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}$ entraîne $t_1 = \cdots = t_n = 0$.

(iii) Elle est *liée* si elle n'est pas libre : il existe des réels $t_1, \ldots, t_n$ non tous nuls tels que $t_1\overrightarrow{u}_1 + \cdots + t_n\overrightarrow{u}_n = \overrightarrow{0}$.

Définition 14.5 (Colinéaires, Coplanaires).

(i) Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est liée.

(ii) Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est liée.

Théorème 14.4 (Reconnaître la Colinéarité et la Coplanarité). Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs.

(i) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

(ii) Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$.

(iii) Si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels s, t tels que $\overrightarrow{w} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$.

Preuve. (i) $1 \cdot \overrightarrow{0} + 0 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, avec un coefficient non nul. (ii) Si $t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ avec $(t, s) \neq (0, 0)$, alors $s \neq 0$: sinon $t \neq 0$ et $t\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, d'où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ (Théorème 14.3 (ii)) ; donc $\overrightarrow{v} = -\frac{t}{s}\overrightarrow{u}$. Inversement, si $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$, alors $t\overrightarrow{u} + (-1)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. (iii) Si $r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} + q\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ avec r, s, q non tous nuls, alors $q \neq 0$: sinon $r\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ avec $(r, s) \neq (0, 0)$, ce qui contredit la liberté de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; donc $\overrightarrow{w} = -\frac{r}{q}\overrightarrow{u} - \frac{s}{q}\overrightarrow{v}$. Inversement, si $\overrightarrow{w} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$, alors $s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v} + (-1)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Définition 14.6 (Droite, Vecteur Directeur). Soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul.

(i) La *droite passant par A de vecteur directeur* $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires, c'est-à-dire (Théorème 14.4 (ii)) tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ pour un réel t.

(ii) Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{u}$ est aussi un *vecteur directeur* de cette droite.

(iii) Deux droites sont *parallèles* si un vecteur directeur de l'une et un vecteur directeur de l'autre sont colinéaires.

Théorème 14.5 (Droites). Ce théorème est admis.

(i) L'ensemble de la Définition 14.6 est une droite au sens de la géométrie du collège. Il ne change pas si l'on remplace A par un autre de ses points, ou $\overrightarrow{u}$ par un autre de ses vecteurs directeurs ; deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires.

(ii) Par deux points distincts A et B passe une droite et une seule, notée (AB) : c'est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

Points Alignés

Trois points sont *alignés* s'ils appartiennent à une même droite.

Théorème 14.6 (Alignement et Colinéarité). Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Si $A \neq B$, c'est le cas si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Preuve. Si $A = B$, les trois points sont sur une droite passant par A et C (la droite (AC) si $A \neq C$), et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ (Théorème 14.4 (i)). Si $A \neq B$, une droite qui contient A et B est la droite (AB) (Théorème 14.5 (ii)) ; donc A, B, C sont alignés si et seulement si $C \in (AB)$, c'est-à-dire, par la Définition 14.6 (i) avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$ (Théorème 14.3 (i)), si et seulement si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k, ou encore si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (Théorème 14.4 (ii)).

Exemple 14.3 (Trois Points Alignés). Soient A, B deux points distincts, et C le point tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ (Théorème 14.1 (i)). Alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB}$, donc A, B, C sont alignés par le Théorème 14.6, avec $k = 3$.

Définition 14.7 (Plan, Vecteurs Directeurs). Soient A un point de l'espace et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille libre. Le *plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AM}$ soient coplanaires, c'est-à-dire (Théorème 14.4 (iii)) tels que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ pour des réels s, t.

Théorème 14.7 (Plans). Ce théorème est admis.

(i) L'ensemble de la Définition 14.7 est un plan au sens de la géométrie du collège. Il ne change pas si l'on remplace A par un autre de ses points, ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par une autre famille libre de vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ (M, N dans le plan).

(ii) Par trois points non alignés A, B, C passe un plan et un seul, noté (ABC) : c'est le plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, qui forment une famille libre (Théorème 14.6 et Définition 14.5).

(iii) Trois points, ou quatre points dont trois sont alignés, appartiennent toujours à un même plan.

Points Coplanaires

Quatre points sont *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan.

Théorème 14.8 (Coplanarité de Quatre Points). Quatre points A, B, C, D de l'espace sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Si A, B, C ne sont pas alignés, c'est le cas si et seulement s'il existe des réels s, t tels que $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$.

Preuve. Si A, B, C sont alignés, les quatre points sont coplanaires (Théorème 14.7 (iii)) ; et $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (Théorème 14.6) : $r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ avec $(r, s) \neq (0, 0)$, donc $r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} + 0 \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$, et la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est liée. Sinon, le seul plan qui contient A, B, C est (ABC) (Théorème 14.7 (ii)) ; les quatre points sont coplanaires si et seulement si $D \in (ABC)$, c'est-à-dire, par la Définition 14.7, si $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ pour des réels s, t, ou encore, la famille $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ étant libre (Théorème 14.7 (ii)), si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires (Théorème 14.4 (iii)).

14.3 Dans le Plan

Une base du plan est formée de deux vecteurs non colinéaires. Tout vecteur s'écrit alors d'une seule façon avec eux : ses coordonnées. Les droites deviennent des équations.

Base et Coordonnées d'un Vecteur

Définition 14.8 (Base du Plan). Une *base* du plan est une famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de deux vecteurs du plan non colinéaires, c'est-à-dire une famille libre.

Théorème 14.9 (Coordonnées d'un Vecteur). Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base du plan. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan :

(i) il existe des réels x, y tels que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ (admis) ;

(ii) ces réels sont uniques. On les appelle les *coordonnées* de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, et l'on note $\overrightarrow{u}\,(x, y)$.

Preuve de (ii). Si $x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$, alors $(x - x')\overrightarrow{i} + (y - y')\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ (Théorème 14.2) ; la famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ étant libre, $x - x' = 0$ et $y - y' = 0$.

Remarque 14.3 (Lire le Théorème). L'unicité (ii) dit que deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

Repère et Coordonnées d'un Point

Définition 14.9 (Repère du Plan). Un *repère* du plan est la donnée $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'un point O, l'*origine*, et d'une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Les *coordonnées* d'un point M sont celles du vecteur $\overrightarrow{OM}$; on note $M(x, y)$, ce qui signifie $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On dit que x est l'*abscisse* et y l'*ordonnée* de M.

Corollaire 14.1 (Points et Couples). Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, tout point a un couple de coordonnées et un seul, et tout couple (x, y) de réels est le couple de coordonnées d'un point et d'un seul.

Preuve. La première affirmation est le Théorème 14.9 appliqué à $\overrightarrow{OM}$. Pour la seconde, le Théorème 14.1 (i) donne un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Théorème 14.10 (Coordonnées et Opérations). Dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan, soient $\overrightarrow{u}(x, y)$, $\overrightarrow{v}(x', y')$, t un réel, et $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$.

(i) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y')$, et $t\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (tx, ty) ; ces formules ne font intervenir que la base.

(ii) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

(iii) Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Preuve. (i) Par le Théorème 14.2, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x + x')\overrightarrow{i} + (y + y')\overrightarrow{j}$ et $t\overrightarrow{u} = (tx)\overrightarrow{i} + (ty)\overrightarrow{j}$; on conclut par l'unicité des coordonnées (Théorème 14.9 (ii)). (ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (relation de Chasles, Théorème 14.3 (i)), puis (i). (iii) $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (Théorème 14.3 (iii)), d'où, par (i) et (ii), l'abscisse $x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A+x_B}{2}$, et de même l'ordonnée.

Exemple : Compléter un Parallélogramme

Exemple 14.4 (Le Quatrième Sommet). Dans un repère du plan, soient $A\,(1,2)$, $B\,(4,-1)$, $C\,(3,5)$. Cherchons D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Étape 1 : traduire par des vecteurs. Par le Théorème 14.3 (iv), $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Étape 2 : passer aux coordonnées. Par le Théorème 14.10 (ii), $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3,-3)$ et, si $D\,(x,y)$, $\overrightarrow{DC}$ a pour coordonnées $(3-x, 5-y)$. Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées (Remarque 14.3) : $3-x=3$ et $5-y=-3$, d'où $D\,(0,8)$.

Étape 3 : vérifier. Par le Théorème 14.10 (iii), le milieu de $[AC]$ et celui de $[BD]$ ont tous deux pour coordonnées $\left(2, \frac{7}{2}\right)$.

Théorème 14.11 (Critère de Colinéarité). Dans une base du plan, $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Preuve. Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, les deux conditions sont vraies (Théorème 14.4 (i)). Supposons $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. Si $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$, alors $x' = tx$ et $y' = ty$ (Théorème 14.10 (i), qui ne fait intervenir que la base), et $xy' - x'y = txy - txy = 0$. Inversement, supposons $xy' = x'y$. Si $x \neq 0$, posons $t = \frac{x'}{x}$: $x' = tx$ et $y' = \frac{x'y}{x} = ty$. Si $x = 0$, alors $y \neq 0$; posons $t = \frac{y'}{y}$: $y' = ty$, et $x'y = xy' = 0$ donne $x' = 0 = tx$. Dans les deux cas $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$, et l'on conclut par le Théorème 14.4 (ii).

Exemple 14.5 (Trois Points Alignés). Dans un repère du plan, soient $A(1, 2)$, $B(3, 6)$, $C(-2, -4)$. Alors $\overrightarrow{AB}(2, 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-3, -6)$, et $2 \times (-6) - (-3) \times 4 = 0$: ces vecteurs sont colinéaires (Théorème 14.11), donc A, B, C sont alignés (Théorème 14.6).

Droite du Plan : deux Descriptions

Théorème 14.12 (Représentation Paramétrique, Équation Cartésienne). Dans un repère du plan, soient $A(x_A, y_A)$, $\overrightarrow{u}(a, b)$ non nul, et $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Pour tout point $M(x, y)$:

(i) $M \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $x = x_A + ta$ et $y = y_A + tb$;

(ii) $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0$.

Preuve. (i) Par la Définition 14.6 (i), $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ pour un réel t ; par le Théorème 14.10 et l'unicité des coordonnées, cela s'écrit $x - x_A = ta$ et $y - y_A = tb$. (ii) $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}(a, b)$ et $\overrightarrow{AM}(x - x_A, y - y_A)$ sont colinéaires, c'est-à-dire, par le Théorème 14.11, si $a(y - y_A) - (x - x_A)b = 0$.

Définition 14.10 (Représentation Paramétrique, Équation Cartésienne). Le système de (i), t décrivant $\mathbb{R}$, est une *représentation paramétrique* de $\mathcal{D}$. Une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$ est une équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, dont les solutions sont exactement les couples de coordonnées des points de $\mathcal{D}$; celle de (ii) en est une, car $(b, -a) \neq (0, 0)$.

Équation Cartésienne d'une Droite

Théorème 14.13 (Toute Équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est celle d'une Droite). Dans un repère du plan, soient α, β, γ des réels avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. L'ensemble Δ des points $M(x, y)$ tels que $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-\beta, \alpha)$.

Preuve. Δ contient un point A : $A\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right)$ si $\alpha \neq 0$, et $A\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ si $\alpha = 0$, car alors $\beta \neq 0$; on a $\alpha x_A + \beta y_A + \gamma = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{u}(-\beta, \alpha)$ est non nul. Par le Théorème 14.12 (ii) avec $a = -\beta$ et $b = \alpha$, un point $M(x, y)$ est sur la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$, c'est-à-dire $\alpha x + \beta y - (\alpha x_A + \beta y_A) = 0$, ou encore $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Cette droite est donc Δ.

Remarque 14.4 (Une Équation, pas l'Équation). En multipliant une équation cartésienne par un réel non nul, on obtient une autre équation cartésienne de la même droite : $2x - y + 1 = 0$ et $4x - 2y + 2 = 0$ décrivent la même droite.

Exemple : d'une Description à l'Autre

Exemple 14.6 (Paramétrique et Cartésienne). Dans un repère du plan, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,2)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3,4)$.

Étape 1 : représentation paramétrique. Par le Théorème 14.12 (i) : $x = 1+3t$, $y = 2+4t$, $t \in \mathbb{R}$.

Étape 2 : équation cartésienne. Par le Théorème 14.12 (ii) : $4(x-1)-3(y-2)=0$, soit $4x-3y+2=0$. Contrôle : $4\times 1-3\times 2+2=0$.

Étape 3 : le chemin inverse. Soit Δ la droite d'équation $2x-3y-6=0$. Par le Théorème 14.13, $\overrightarrow{w}(3,2)$ en est un vecteur directeur, et le point $(3,0)$ lui appartient : Δ est la droite passant par ce point de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ (Théorème 14.5 (i)), et une représentation paramétrique de Δ est $x = 3+3t$, $y = 2t$, $t \in \mathbb{R}$ (Théorème 14.12 (i)).

Droites Parallèles ou Sécantes

Théorème 14.14 (Position de Deux Droites). Dans un repère du plan, soient $\mathcal{D} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et $\mathcal{D}' : \alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$ deux droites, et $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$.

(i) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\delta = 0$. Deux droites parallèles sont alors soit *confondues*, soit sans point commun (*strictement parallèles*).

(ii) Si $\delta \neq 0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont *sécantes* : elles ont un point commun et un seul, de coordonnées $x = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\delta}$ et $y = \frac{\alpha'\gamma - \alpha\gamma'}{\delta}$.

Preuve de (i). Par le Théorème 14.13, $\overrightarrow{u}\,(-\beta, \alpha)$ et $\overrightarrow{u}'\,(-\beta', \alpha')$ dirigent $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$; par la Définition 14.6 (iii) et le Théorème 14.11, les droites sont parallèles si et seulement si $(-\beta)\,\alpha' - (-\beta')\,\alpha = \delta$ est nul ; le choix des vecteurs directeurs ne compte pas, car deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires (Théorème 14.5 (i)), et la colinéarité se transmet entre vecteurs non nuls (Théorème 14.4 (ii)). Deux droites parallèles qui ont un point commun A passent par A avec des vecteurs directeurs colinéaires : elles sont confondues (Théorème 14.5 (i)).

Preuve du Théorème 14.14 (ii) et Exemple

Preuve de (ii). Un point commun a des coordonnées (x, y) qui vérifient $\alpha x + \beta y = -\gamma$ et $\alpha' x + \beta' y = -\gamma'$. En multipliant la première par β', la seconde par β, et en soustrayant, $\delta x = \beta\gamma' - \beta'\gamma$; de même, avec α' et α, $\delta y = \alpha'\gamma - \alpha\gamma'$. Comme $\delta \neq 0$, il y a au plus un point commun, celui de l'énoncé. Inversement, ce point convient : $\alpha(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + \beta(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') = -\gamma(\alpha\beta' - \alpha'\beta) = -\gamma\delta$, et de même pour $\mathcal{D}'$.

Exemple 14.7 (Intersection de Deux Droites). Dans un repère du plan, soient $\mathcal{D} : x + 2y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}' : 3x - y - 5 = 0$.

Étape 1 : la position. $\delta = 1 \times (-1) - 3 \times 2 = -7 \neq 0$: les droites sont sécantes (Théorème 14.14 (ii)).

Étape 2 : le point commun. Par substitution, la première équation donne $x = 4 - 2y$, et la seconde $3(4 - 2y) - y - 5 = 0$, soit $y = 1$, puis $x = 2$. Le point commun est $(2, 1)$; la formule du théorème donne le même résultat.

14.4 Dans l'Espace

Dans l'espace, une base est formée de trois vecteurs non coplanaires, et un point a trois coordonnées. Droites et plans y sont décrits par des représentations paramétriques.

Base et Repère de l'Espace

Définition 14.11 (Base, Repère de l'Espace). Une *base* de l'espace est une famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de trois vecteurs non coplanaires, c'est-à-dire une famille libre. Un *repère* de l'espace est la donnée $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ d'un point O et d'une base.

Théorème 14.15 (Coordonnées dans l'Espace). Soit $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'espace.

(i) Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ (existence admise), avec des réels x, y, z uniques : ce sont ses *coordonnées*, et l'on note $\overrightarrow{u}(x, y, z)$. Les coordonnées d'un point M sont celles de $\overrightarrow{OM}$; on note $M(x, y, z)$.

(ii) Tout point a un triplet de coordonnées et un seul, et tout triplet de réels est celui d'un point et d'un seul.

Preuve. Celles du Théorème 14.9 (ii) et du Corollaire 14.1, avec trois termes au lieu de deux.

Corollaire 14.2 (Coordonnées et Opérations dans l'Espace). Dans un repère de l'espace, les formules du Théorème 14.10 restent vraies avec une troisième coordonnée ; celles qui portent sur des vecteurs ne font intervenir que la base. En particulier, si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

Preuve. Celle du Théorème 14.10, avec trois termes, l'unicité des coordonnées venant du Théorème 14.15 (i).

Dans l'espace, on reconnaît la colinéarité ou la coplanarité en cherchant les réels du Théorème 14.4 : on résout un système.

Exemple 14.8 (Trois Points non Alignés). Dans un repère de l'espace, soient $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$, $C(3,5,6)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(1,2,3)$ n'est pas nul, donc $A \neq B$ (Théorème 14.3 (i)), et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(2,4,5)$. Si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, la première coordonnée donne $k = 2$, et la troisième $5 = 3k = 6$: c'est impossible. Les points ne sont pas alignés (Théorème 14.6).

Exemple 14.9 (Coplanaires ou Non). Dans une base de l'espace, soient $\overrightarrow{u}\,(1,0,1)$, $\overrightarrow{v}\,(0,1,1)$. La famille $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ est libre : $s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(s,t,s+t)$, nulles seulement si $s=t=0$.

(a) $\overrightarrow{w}\,(2,3,5)=2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires (Théorème 14.4 (iii)).

(b) Pour $\overrightarrow{w}'\,(1,1,0)$, $(s,t,s+t)=(1,1,0)$ donne $s=t=1$ et $s+t=2\neq 0$: $\overrightarrow{w}'$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires (Théorème 14.4 (iii)) : $\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}'\right)$ est une base de l'espace.

Théorème 14.16 (Représentations Paramétriques). Dans un repère de l'espace, soit $A(x_A, y_A, z_A)$.

(i) Si $\overrightarrow{u}(a, b, c) \neq \overrightarrow{0}$, le point $M(x, y, z)$ appartient à la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$x = x_A + ta, \quad y = y_A + tb, \quad z = z_A + tc.$$

(ii) Si $\left(\overrightarrow{u}(a, b, c), \overrightarrow{v}(a', b', c')\right)$ est libre, $M(x, y, z)$ appartient au plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ si et seulement s'il existe des réels s, t tels que

$$x = x_A + sa + ta', \quad y = y_A + sb + tb', \quad z = z_A + sc + tc'.$$

Ces systèmes sont des *représentations paramétriques* de la droite et du plan.

Preuve. On écrit $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$ (Définition 14.6 (i)), resp. $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ (Définition 14.7), puis on passe aux coordonnées (Corollaire 14.2, Théorème 14.15 (i)).

Une Droite de l'Espace n'a pas une Seule Équation

Remarque 14.5 (Équations dans l'Espace). Dans l'espace, une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, avec α, β, γ non tous nuls, décrit un plan (cours 15 [2]), et non une droite. Une droite de l'espace se décrit par une représentation paramétrique, ou par un *système* de deux équations, celles de deux plans qui la contiennent.

Exemple 14.10 (Éliminer le Paramètre). Dans un repère de l'espace, soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1,2,3)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(2,1,0)$.

Étape 1 : représentation paramétrique. Par le Théorème 14.16 (i) : $x = 1 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = 3$, $t \in \mathbb{R}$.

Étape 2 : un système d'équations. Si $M(x,y,z) \in \mathcal{D}$, alors $t = y - 2$, d'où $x = 1 + 2(y-2) : x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$. Inversement, si $x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$, le réel $t = y - 2$ donne $x = 2y - 3 = 1 + 2t$, $y = 2 + t$ et $z = 3 : M \in \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points tels que $x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$.

Attention. On a exprimé t en fonction de y car la deuxième coordonnée de $\overrightarrow{u}$ n'est pas nulle.

14.5 Repères Orthonormés

Pour mesurer des longueurs avec des coordonnées, il faut une base faite de vecteurs de norme 1 orthogonaux deux à deux. On obtient alors la formule de la distance, par le théorème de Pythagore.

Définition 14.12 (Vecteurs Orthogonaux, Base Orthonormée). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs.

(i) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, et l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si l'un d'eux est nul, ou si, en les écrivant avec une même origine, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ (Théorème 14.1 (i)), les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

(ii) Un vecteur $\vec{u}$ est *unitaire* si $\left\|\vec{u}\right\| = 1$.

(iii) Une base du plan $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ (resp. de l'espace $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$) est *orthonormée* si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux ; un repère est *orthonormé* si sa base l'est.

Théorème 14.17 (Orthogonalité). Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs et s, t des réels. Ce théorème est admis.

(i) La définition (i) ne dépend pas de l'origine A choisie.

(ii) Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $s\vec{u} \perp t\vec{v}$.

(iii) Si $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$, alors $\vec{w} \perp \left(s\vec{u} + t\vec{v}\right)$.

Théorème 14.18 (Norme et Distance en Repère Orthonormé).

(i) Dans une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{u}\,(x, y)$, alors $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

(ii) Dans une base orthonormée de l'espace, si $\overrightarrow{u}\,(x, y, z)$, alors $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Preuve de (i). Soient O un point, P tel que $\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{i}$ et Q tel que $\overrightarrow{PQ} = y\,\overrightarrow{j}$ (Théorème 14.1 (i)) ; alors $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{u}$ (relation de Chasles). Par la Définition 14.2 (ii), $OP = |x| \left\|\overrightarrow{i}\right\| = |x|$ et $PQ = |y|$. Si $x = 0$ ou $y = 0$, $P = O$ ou $Q = P$ (Théorème 14.3 (i), (ii)), et $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ vaut $|y|$ ou $|x|$. Sinon, $\overrightarrow{PO} = -x\,\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{PQ} = y\,\overrightarrow{j}$ sont orthogonaux (Théorème 14.17 (i), (ii)) : le triangle OPQ est rectangle en P, et $OQ^2 = OP^2 + PQ^2 = x^2 + y^2$ (théorème de Pythagore). Enfin, $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$, et le Théorème 14.10 (ii) donne les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Preuve de (ii). La famille $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est libre, car $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ l'est. Soient O un point, P tel que $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et Q tel que $\overrightarrow{PQ} = z\overrightarrow{k}$. Dans le plan passant par O de vecteurs directeurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, dont $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée, (i) donne $OP^2 = x^2 + y^2$; et $PQ = |z|$. Si $P = O$, alors $x = y = 0$ et $OQ = |z|$; si $Q = P$, alors $z = 0$ et $OQ = OP$. Sinon, $\overrightarrow{PQ} = z\overrightarrow{k}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PO} = -x\overrightarrow{i} - y\overrightarrow{j}$ (Théorème 14.17 (i) à (iii)), et le théorème de Pythagore dans le triangle OPQ, rectangle en P, donne $OQ^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Exemple 14.11 (Deux Distances). Dans un repère orthonormé du plan, $A(1, 2)$ et $B(4, 6)$ donnent $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Dans un repère orthonormé de l'espace, $A(1, 0, 2)$ et $B(3, 1, 4)$ donnent $AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$ (Théorème 14.18).

Exemple : Points Symétriques

Exemple 14.12 (Symétriques d'un Point). Soit $M(x, y)$ dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ du plan.

Étape 1 : symétrique par rapport à O. Le point $M'(x', y')$ tel que O soit le milieu de $[MM']$ a pour coordonnées $(-x, -y)$, par le Théorème 14.10 (iii) : $\frac{x+x'}{2} = 0$ et $\frac{y+y'}{2} = 0$; inversement, ce point existe (Corollaire 14.1) et convient. Ceci vaut dans tout repère.

Étape 2 : symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Le repère est maintenant orthonormé. Soit $M'(x, -y)$, avec $y \neq 0$. Le milieu de $[MM']$ est $H(x, 0)$, sur l'axe des abscisses (la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$), et $\overrightarrow{MM'}(0, -2y) = -2y\overrightarrow{j}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}$ (Théorème 14.17 (i), (ii)). L'axe des abscisses est donc la médiatrice de $[MM']$: M' est le symétrique de M par rapport à elle. Si $y = 0$, M est sur l'axe, et il est son propre symétrique.

Étape 3 : par rapport à l'axe des ordonnées. De même, le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées (la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$) est $(-x, y)$.

À retenir

On retient les définitions et les critères, puis les formules en coordonnées, en sachant pour chacune si elle demande un repère orthonormé.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu ; relation de Chasles ; $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (Définitions 14.1, 14.2, Théorème 14.3).
- $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{v} = t\overrightarrow{u}$; A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (Théorèmes 14.4, 14.6) ; de même pour la coplanarité (Théorème 14.8).
- Une base donne des coordonnées uniques ; $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, \dots)$ et le milieu $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \dots\right)$ dans tout repère (Théorèmes 14.9, 14.10, 14.15, Corollaire 14.2).
- Dans le plan : colinéarité si et seulement si $xy' - x'y = 0$; une droite a une représentation paramétrique et des équations cartésiennes $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, de vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$; deux droites sont sécantes si et seulement si $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ (Théorèmes 14.11 à 14.14).
- Dans l'espace : représentations paramétriques d'une droite et d'un plan ; une droite n'a pas une seule équation (Théorème 14.16, Remarque 14.5).
- En repère orthonormé seulement : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \left(+ (z_B - z_A)^2\right)}$ (Théorème 14.18).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.