Cours 15

Produit Scalaire des Vecteurs, Géométrie dans l'Espace

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

13 novembre 2026

Plan

Introduction

15.1 Produit Scalaire

15.2 Angle et Projection

15.3 Vecteurs Normaux et Équations

15.4 Produit Vectoriel

15.5 Positions Relatives

15.6 Distances et Sphère

À retenir

Introduction

Le produit scalaire associe un nombre à deux vecteurs. Il dit quand deux vecteurs sont orthogonaux, mesure les angles, et donne les équations des plans de l'espace.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les vecteurs, les coordonnées, l'orthogonalité, la norme et les représentations paramétriques (cours 14 [2]) ; le cosinus et le sinus (cours 11 [1]) ; le théorème de Pythagore et sa réciproque, l'aire d'un triangle (collège).
- **Les objets :** le produit scalaire, l'angle de deux vecteurs, le projeté orthogonal ; les vecteurs normaux ; le produit vectoriel ; la distance d'un point à un plan ; la sphère.
- **Ce qu'on saura faire :** reconnaître des vecteurs orthogonaux, calculer un angle ou une longueur ; écrire une équation cartésienne d'une droite du plan ou d'un plan de l'espace ; étudier la position de deux plans, d'une droite et d'un plan, de deux droites ; calculer une distance ; étudier la section d'une sphère par un plan.
- **Et ensuite :** les isométries du plan (cours 20 [4]) ; les systèmes linéaires (cours 18 [3]).

Dans toute la leçon, la longueur d'un segment $[AB]$ est notée AB, et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.

15.1 Produit Scalaire

On définit le produit scalaire par des longueurs, sans repère. Dans un repère orthonormé, il se calcule avec les coordonnées ; il est nul exactement pour les vecteurs orthogonaux.

Définition

Les vecteurs sont ceux du plan, ou ceux de l'espace.

Définition 15.1 (Produit Scalaire). Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right).$$

Remarque 15.1 (Lire la Définition). Le produit scalaire ne fait intervenir que des normes, c'est-à-dire des longueurs (Théorème 14.1 (iii) du cours 14 [2]) : il ne dépend d'aucun repère. Il est symétrique : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$, car $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.

Théorème 15.1 (Repères Orthonormés). Ce théorème est admis.

(i) Soient $\mathcal{P}$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$ avec $B \in \mathcal{P}$ et $AB = 1$). Il existe un vecteur $\overrightarrow{j}$ tel que $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ soit un repère orthonormé de $\mathcal{P}$.

(ii) L'espace a des repères orthonormés.

Théorème 15.2 (Produit Scalaire et Coordonnées).

(i) Dans une base orthonormée du plan, si $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

(ii) Dans une base orthonormée de l'espace, si $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.

Preuve. (ii) Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$ (Corollaire 14.2). Par le Théorème 14.18 (ii),

$$\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right),$$

qui vaut $2(xx' + yy' + zz')$. (i) De même, avec le Théorème 14.10 et le Théorème 14.18 (i).

Remarque 15.2 (Une Base Orthonormée Suffit). La formule du Théorème 15.2 demande une base orthonormée. Le produit scalaire ne dépendant d'aucun repère, on peut, pour démontrer une propriété, calculer dans un repère orthonormé quelconque (Théorème 15.1).

Théorème 15.3 (Règles de Calcul). Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ et tout réel t :

(i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

(ii) $(t\vec{u}) \cdot \vec{v} = t(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}$; de même à droite : $\vec{u} \cdot (t\vec{v}) = t(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$;

(iii) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$;

(iv) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$, $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

Preuve du Théorème 15.3

Preuve. On calcule dans une base orthonormée de l'espace (Théorème 15.1 (ii), Remarque 15.2), avec le Théorème 15.2 (ii) et les coordonnées de $t\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}'$ (Corollaire 14.2) ; dans le plan, de même avec deux coordonnées. (i) $xx' + yy' + zz'$ ne change pas quand on échange les deux vecteurs. (ii) $(tx)\,x' + (ty)\,y' + (tz)\,z' = t\,(xx' + yy' + zz')$, et de même pour la somme ; les égalités à droite s'en déduisent par (i). (iii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2$ (Théorème 14.18 (ii)), nul si et seulement si $x = y = z = 0$. (iv) On développe par (i) à (iii).

Théorème 15.4 (Critère d'Orthogonalité). Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Preuve. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul, les deux vecteurs sont orthogonaux (Définition 14.12 (i)) et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ (Théorème 15.3 (ii) avec $t = 0$). Sinon, écrivons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ (Théorème 14.1 (i)) ; alors $B \neq A$, $C \neq A$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{CB}$ (relation de Chasles). Par le Théorème 15.3 (iv),

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Si A, B, C ne sont pas alignés, le théorème de Pythagore et sa réciproque, appliqués dans un plan contenant A, B, C (Théorème 14.7 (iii)), disent que (AB) et (AC) sont perpendiculaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ (Définition 14.12 (i)), si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ou encore $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Si A, B, C sont alignés, $(AB) = (AC)$ (Théorème 14.5 (ii)) n'est pas perpendiculaire à elle-même ; et $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{u}$ avec $k \neq 0$ (Théorème 14.6), d'où $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = k \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 \neq 0$ (Théorème 15.3 (ii), (iii)).

Exemple : Deux Vecteurs Orthogonaux

Exemple 15.1 (Deux Vecteurs Orthogonaux). Dans une base orthonormée de l'espace, soient $\overrightarrow{u}\,(1,2,2)$ et $\overrightarrow{v}\,(2,-3,2)$. Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=2-6+4=0$: les vecteurs sont orthogonaux (Théorème 15.4). De plus, $\left\|\overrightarrow{u}\right\|=\sqrt{1+4+4}=3$ (Théorème 14.18 (ii)).

15.2 Angle et Projection

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est le produit de leurs normes et du cosinus de leur angle. On en tire le projeté orthogonal, la formule d'Al-Kashi et le théorème de la médiane.

Angle de Deux Vecteurs

Définition 15.2 (Angle de Deux Vecteurs). Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, écrits $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. L'*angle* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, mesuré en radians dans $[0, \pi]$. On admet qu'il ne dépend pas du point A choisi.

Théorème 15.5 (Produit Scalaire et Cosinus). Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et d'angle θ, alors

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\| \overrightarrow{u} \right\| \left\| \overrightarrow{v} \right\| \cos\theta.$$

Preuve du Théorème 15.5

Preuve. Écrivons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, et soit $\mathcal{P}$ un plan contenant A, B, C : dans le plan, $\mathcal{P}$ est le plan lui-même ; dans l'espace, il en existe un (Théorème 14.7 (iii)). Soient B' et C' les points tels que $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{\|\overrightarrow{v}\|}\overrightarrow{v}$: ils sont sur les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, à la distance 1 de A (Définition 14.2 (ii)), et $\widehat{B'AC'} = \widehat{BAC} = \theta$. Par le Théorème 15.1 (i), il existe un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ de $\mathcal{P}$ avec $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB'}$; quitte à remplacer $\overrightarrow{j}$ par $-\overrightarrow{j}$, unitaire et orthogonal à $\overrightarrow{i}$ (Théorème 14.17 (ii)), l'ordonnée de C' est positive ou nulle. Dans ce repère, B' est le point $(1, 0)$ et C' est sur le cercle trigonométrique, donc $C' = M(x)$ avec $x \in [0, 2\pi[$ (Définition 11.2 (i)) ; comme $\sin x \geq 0$, $x \in [0, \pi]$ (Théorème 11.4 (i)), et l'angle $\widehat{B'AC'}$ mesure x (Théorème 11.2 (iii) du cours 11 [1]) : $x = \theta$. Donc C' a pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$ (Définition 11.3) ; comme $\overrightarrow{v}$ est le produit de $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$ par le vecteur de A à C', il a pour coordonnées $\left(\left\|\overrightarrow{v}\right\|\cos\theta, \left\|\overrightarrow{v}\right\|\sin\theta\right)$, et $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|, 0\right)$; le Théorème 15.2 (i) donne $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\theta$.

Exemple : Calculer un Angle

Exemple 15.2 (Un Angle de $\frac{\pi}{3}$). Dans une base orthonormée de l'espace, soient $\overrightarrow{u}\,(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v}\,(1,0,1)$, d'angle θ.

Étape 1 : produit scalaire et normes. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$ (Théorème 15.2 (ii)) et $\left\|\overrightarrow{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{v}\right\|=\sqrt{2}$ (Théorème 14.18 (ii)).

Étape 2 : cosinus. Par le Théorème 15.5, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

Étape 3 : angle. $\theta\in[0,\pi]$, et cos est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11 [1]) : le seul réel de $[0,\pi]$ de cosinus $\frac{1}{2}$ est $\frac{\pi}{3}$ (Théorème 11.5). Donc $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Remarque 15.3 (Signe du Produit Scalaire). Pour $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls d'angle θ, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ a le signe de $\cos\theta$ (Théorème 15.5, avec $\left\|\overrightarrow{u}\right\|\left\|\overrightarrow{v}\right\|>0$). Sur $[0,\pi]$, $\cos\theta>0$ si $\theta<\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta=0$ si $\theta=\frac{\pi}{2}$, et $\cos\theta<0$ si $\theta>\frac{\pi}{2}$ (Théorèmes 11.4 (ii) et 11.5 du cours 11 [1]). Donc $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}>0$ si et seulement si $\theta<\frac{\pi}{2}$ (angle aigu), et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}<0$ si et seulement si $\theta>\frac{\pi}{2}$ (angle obtus).

Projeté Orthogonal sur une Droite

Définition 15.3 (Projeté Orthogonal sur une Droite). Soient $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et C un point. Le *projeté orthogonal* de C sur $\mathcal{D}$ est le point H de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{u}$. Il ne dépend pas du vecteur directeur choisi (Théorème 14.5 (i), Théorème 14.17 (ii)) ; toute droite s'écrit (AB) avec $A \neq B$ (Théorème 14.1 (i), Théorème 14.5 (ii)), et le Théorème 15.6 montre que H existe et est unique.

Théorème 15.6 (Projeté Orthogonal et Produit Scalaire). Soient A, B deux points distincts, C un point, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

(i) Le projeté orthogonal H de C sur (AB) existe et est unique : c'est le point tel que $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{u}$, avec $t = \frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$.

(ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH}$; c'est $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AH}$ est nul ou de même sens que $\overrightarrow{u}$, et $-AB \times AH$ sinon.

Preuve du Théorème 15.6

Preuve. (i) Un point H de (AB) s'écrit $\overrightarrow{AH} = t\,\overrightarrow{u}$ (Théorème 14.5 (ii), Définition 14.6 (i)), et $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{v} - t\,\overrightarrow{u}$. Par les Théorèmes 15.4 et 15.3 (ii), (iii), $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - t \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 = 0$, ce qui a une seule solution t, car $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. (ii) $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH} = t \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$. Enfin $AH = |t|\,AB$, et $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{u}$ si $t > 0$, de sens contraire si $t < 0$ (Définition 14.2 (ii)) : $t\,AB^2$ vaut $AB \times AH$ si $t \geq 0$, et $-AB \times AH$ si $t < 0$.

Théorème 15.7 (Al-Kashi, Médiane). Soit ABC un triangle (A, B, C non alignés).

(i) *Formule d'Al-Kashi* : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

(ii) *Théorème de la médiane* : si I est le milieu de $[BC]$, alors $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Preuve. (i) Avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (preuve du Théorème 15.4), et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ (Théorème 15.5). (ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}$, avec $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{IB}$ (Théorème 14.3 (iii), (i)). Par le Théorème 15.3 (iv),

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\,\overrightarrow{AI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + IB^2 + IC^2 = 2AI^2 + 2IB^2,$$

et $IB = \frac{1}{2}BC$.

Exemple : un Troisième Côté

Exemple 15.3 (Un Troisième Côté). Si $AB = 3$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, alors $BC^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 19$ (Théorème 15.7 (i), Théorème 11.5 du cours 11 [1]) : $BC = \sqrt{19}$.

15.3 Vecteurs Normaux et Équations

Un vecteur orthogonal à une droite du plan, ou à un plan de l'espace, en donne une équation cartésienne. Dans l'espace, toute équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ est celle d'un plan.

Droite du Plan et Vecteur Normal

Définition 15.4 (Vecteur Normal à une Droite). Un *vecteur normal* à une droite $\mathcal{D}$ du plan est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc à tous (Théorème 14.5 (i), Théorème 14.17 (ii)).

Théorème 15.8 (Équation Cartésienne et Vecteur Normal). Dans un repère orthonormé du plan, soient $A(x_A, y_A)$ et $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta) \neq \overrightarrow{0}$.

(i) La droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$; elle a pour équation $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$, et pour vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$.

(ii) Si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, le vecteur $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$ est normal à la droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

La droite de (i) existe et est unique : c'est la droite passant par A de vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$.

Preuve du Théorème 15.8 et Exemple

Preuve. Un vecteur $\overrightarrow{w}(a, b)$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$ si et seulement si $\alpha a + \beta b = 0$ (Théorèmes 15.4 et 15.2 (i)), c'est-à-dire si $\overrightarrow{w}$ et $(-\beta, \alpha)$ sont colinéaires (Théorème 14.11 : $a\alpha - (-\beta)\, b = \alpha a + \beta b$). (i) Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donc colinéaire à $(-\beta, \alpha)$, qui dirige aussi $\mathcal{D}$ (Définition 14.6 (ii)). Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $(-\beta, \alpha)$, c'est-à-dire orthogonal à $\overrightarrow{n}$, ou encore $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$. (ii) Cette droite a pour vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$ (Théorème 14.13), orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

Exemple 15.4 (Une Perpendiculaire). Dans un repère orthonormé, la droite passant par $A(1, 2)$ et perpendiculaire à $\mathcal{D} : x - 3y + 1 = 0$ a pour vecteur normal un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, $(3, 1)$ (Théorème 14.13), puisqu'il est orthogonal aux vecteurs directeurs de cette perpendiculaire (Définition 14.12 (i), Définition 15.4) : elle a pour équation $3(x - 1) + (y - 2) = 0$, soit $3x + y - 5 = 0$ (Théorème 15.8 (i)).

Définition 15.5 (Vecteur Normal à un Plan). Un *vecteur normal* à un plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$. Il est alors orthogonal à $\overrightarrow{AM}$ pour tous points A, M de $\mathcal{P}$, car $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ (Définition 14.7, Théorème 14.7 (i), Théorème 14.17 (iii)) ; la notion ne dépend donc pas des vecteurs directeurs choisis.

Théorème 15.9 (Vecteur Normal à un Plan). Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

(i) La famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}\right)$ est une base de l'espace.

(ii) Un vecteur $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

(iii) $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

(iv) Deux vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ sont colinéaires.

Preuve du Théorème 15.9

Preuve. (i) Sinon, $\vec{n} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (Théorème 14.4 (iii), car $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre), et $\vec{n} \cdot \vec{n} = a\,\vec{u} \cdot \vec{n} + b\,\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ (Théorèmes 15.3 (ii) et 15.4), d'où $\vec{n} = \vec{0}$ (Théorème 15.3 (iii)), ce qui est exclu.

(ii) Si $\vec{w} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$, alors $\vec{w} \cdot \vec{n} = s\,\vec{u} \cdot \vec{n} + t\,\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Inversement, écrivons $\vec{w} = s\,\vec{u} + t\,\vec{v} + r\,\vec{n}$ dans la base (i) (Théorème 14.15 (i)) : $\vec{w} \cdot \vec{n} = r\,\|\vec{n}\|^2$, et $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ donne $r = 0$.

(iii) Par la Définition 14.7, $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$; on conclut par (ii).

(iv) Soit $\vec{n}'$ un autre vecteur normal. Écrivons $\vec{n}' = a\,\vec{u} + b\,\vec{v} + c\,\vec{n}$ dans la base (i), et $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$. Alors $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{w} \cdot \vec{n}' = 0$ par (ii), appliqué à $\vec{n}$ et à $\vec{n}'$. Donc $\vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{n}' - c\,\vec{n}) = 0$, d'où $\vec{w} = \vec{0}$ et $\vec{n}' = c\,\vec{n}$.

Équation Cartésienne d'un Plan

Théorème 15.10 (Équation Cartésienne d'un Plan). Dans un repère orthonormé de l'espace :

(i) le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ a pour équation $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) + \gamma(z - z_A) = 0$;

(ii) si α, β, γ ne sont pas tous nuls, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ est un plan, de vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Le plan de (i) existe, par (ii), et il est unique (Théorème 15.9 (iii)). Une telle équation est une *équation cartésienne* du plan.

Preuve du Théorème 15.10

Preuve. (i) Théorème 15.9 (iii), avec $\overrightarrow{AM}\,(x - x_A, y - y_A, z - z_A)$ et le Théorème 15.2 (ii). (ii) Supposons $\alpha \neq 0$; les autres cas se traitent de même en échangeant les rôles des coordonnées. Le point $A\left(-\frac{d}{\alpha}, 0, 0\right)$ vérifie l'équation, et les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(-\beta, \alpha, 0)$, $\overrightarrow{v}\,(-\gamma, 0, \alpha)$ forment une famille libre : $s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ a pour deuxième et troisième coordonnées $s\alpha$ et $t\alpha$. Ils sont orthogonaux à $\overrightarrow{n}$ (Théorèmes 15.2 (ii) et 15.4), donc $\overrightarrow{n}$ est normal au plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$. Par (i), ce plan a pour équation $\alpha\left(x + \frac{d}{\alpha}\right) + \beta y + \gamma z = 0$, c'est-à-dire $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$.

Remarque 15.4 (Une Équation, pas l'Équation). Comme pour les droites du plan (Remarque 14.4), on obtient une autre équation cartésienne d'un plan en multipliant une équation par un réel non nul.

Exemple : d'une Description à l'Autre

Exemple 15.5 (Paramétrique et Cartésienne). Dans un repère orthonormé de l'espace, soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1,1,0)$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(1,0,1)$ et $\overrightarrow{v}(0,1,2)$.

Étape 1 : un vecteur normal. On cherche $\overrightarrow{n}(\alpha,\beta,\gamma) \neq \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \alpha + \gamma = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = \beta + 2\gamma = 0$. Avec $\gamma = -1$: $\overrightarrow{n}(1,2,-1)$.

Étape 2 : une équation cartésienne. Par le Théorème 15.10 (i), $(x-1)+2(y-1)-z=0$, soit $x+2y-z-3=0$.

Étape 3 : retour au paramétrique. Inversement, le plan d'équation $x+2y-z-3=0$ est l'ensemble des points $(s,t,s+2t-3)$, s et t décrivant $\mathbb{R}$: c'est le plan passant par $B(0,0,-3)$ de vecteurs directeurs $(1,0,1)$ et $(0,1,2)$ (Théorème 14.16 (ii)), c'est-à-dire $\mathcal{P}$.

15.4 Produit Vectoriel

Dans un repère orthonormé direct, deux vecteurs de l'espace en définissent un troisième, orthogonal aux deux. Il donne un vecteur normal à un plan et l'aire d'un triangle.

Définition 15.6 (Repère Orthonormé Direct). On admet que les bases orthonormées de l'espace se répartissent en deux familles, les *directes* et les *indirectes*. Une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est directe lorsque, la main droite ayant le pouce dirigé selon $\overrightarrow{i}$ et l'index selon $\overrightarrow{j}$, le majeur replié est dirigé selon $\overrightarrow{k}$. Une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est directe si et seulement si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{k}\right)$ ne l'est pas ; il existe donc des bases orthonormées directes (Théorème 15.1 (ii)). Un repère orthonormé est *direct* si sa base l'est.

Définition 15.7 (Produit Vectoriel). Dans une base orthonormée directe, le *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ est le vecteur

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \left(yz' - zy',\ zx' - xz',\ xy' - yx'\right).$$

On admet qu'il ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

Propriétés du Produit Vectoriel

Théorème 15.11 (Propriétés du Produit Vectoriel). Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$ et tout réel t :

(i) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;

(ii) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$, $(t\vec{u}) \wedge \vec{v} = t(\vec{u} \wedge \vec{v})$ et $(\vec{u} + \vec{u}') \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u}' \wedge \vec{v}$;

(iii) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$;

(iv) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;

(v) si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et d'angle θ, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin\theta$.

Preuve. On calcule dans une base orthonormée directe, avec le Théorème 15.2 (ii). (i) $x(yz' - zy') + y(zx' - xz') + z(xy' - yx') = 0$, et de même avec (x', y', z') ; on conclut par le Théorème 15.4. (ii) Chaque coordonnée change de signe quand on échange $\vec{u}$ et $\vec{v}$; et chacune est de la forme $px + qy + rz$, où p, q, r ne dépendent que de $\vec{v}$, ce qui donne les deux autres égalités.

Preuve du Théorème 15.11 (suite)

Preuve (suite). (iii) En développant, chaque membre vaut la somme des six carrés $(yz')^2$, $(zy')^2$, …, $(yx')^2$, moins $2(yy'zz' + zz'xx' + xx'yy')$. (iv) Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, les deux membres sont vrais (Théorème 14.4 (i)). Si $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, chaque coordonnée de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ vaut 0, par exemple $y(kz) - z(ky) = 0$. Inversement, soit $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, par exemple $x \neq 0$ (les autres cas de même). Posons $k = \frac{x'}{x}$. La troisième coordonnée nulle donne $xy' = yx'$, soit $y' = ky$; la deuxième donne $xz' = zx'$, soit $z' = kz$; donc $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ (Théorème 14.4 (ii)). (v) Par (iii) et le Théorème 15.5, $\left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 (1 - \cos^2\theta) = \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 \sin^2\theta$ (Théorème 11.1 (ii) du cours 11), et $\sin\theta \geq 0$ pour $\theta \in [0, \pi]$ (Théorèmes 11.4 (i) et 11.5 du cours 11 [1]).

Corollaire 15.1 (Vecteur Normal, Aire d'un Triangle).

(i) Tout plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$: tout plan a des vecteurs normaux.

(ii) Si A, B, C sont trois points non alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC), et l'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

Preuve. (i) La famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est libre (Définition 14.7) : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est non nul (Théorème 15.11 (iv)) et orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$ (Théorème 15.11 (i)). (ii) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de (ABC) (Théorème 14.7 (ii)), et (i) s'applique.

Preuve du Corollaire 15.1 (ii) : l'Aire

Preuve (suite). Pour l'aire, soit H le projeté orthogonal de C sur (AB), et $\theta = \widehat{BAC}$. Par le Théorème 15.6 (ii) et le Théorème 15.5, $AB \times AH = AB \times AC \times |\cos\theta|$, donc $AH = AC\,|\cos\theta|$. Comme $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ avec $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ ($\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, Théorèmes 15.6 (i), 15.3 (ii) et 15.4), $AC^2 = AH^2 + HC^2$ (Théorème 15.3 (iv)), d'où $CH^2 = AC^2\left(1 - \cos^2\theta\right) = AC^2 \sin^2\theta$ (Théorème 11.1 (ii) du cours 11), et $CH = AC\sin\theta$, car $\sin\theta \geq 0$ (Théorèmes 11.4 (i) et 11.5 du cours 11 [1]). L'aire vaut $\frac{1}{2}AB \times CH$ (CH est la hauteur issue de C), soit $\frac{1}{2}AB \times AC\sin\theta$, et le Théorème 15.11 (v) conclut.

Exemple : le Plan par Trois Points

Exemple 15.6 (Plan (ABC)). Dans un repère orthonormé direct, soient $A\,(1,2,0)$, $B\,(2,0,1)$, $C\,(0,1,3)$.

Étape 1 : deux vecteurs directeurs. $\overrightarrow{AB}\,(1,-2,1)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-1,-1,3)$ (Corollaire 14.2).

Étape 2 : produit vectoriel. Par la Définition 15.7, les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ sont

$$(-2)\times 3 - 1\times(-1) = -5, \quad 1\times(-1) - 1\times 3 = -4, \quad 1\times(-1) - (-2)\times(-1) = -3.$$

Il n'est pas nul : A, B, C ne sont pas alignés (Théorème 15.11 (iv), Théorème 14.6).

Étape 3 : équation et aire. Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(5,4,3) = -\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$: il est normal à (ABC) (Corollaire 15.1 (ii), Théorème 14.17 (ii), Définition 15.5) ; une équation est $5\,(x-1) + 4\,(y-2) + 3z = 0$, soit $5x + 4y + 3z - 13 = 0$ (Théorème 15.10 (i)). On vérifie : $10 + 0 + 3 - 13 = 0$ pour B, $0 + 4 + 9 - 13 = 0$ pour C. L'aire de ABC est $\frac{1}{2}\sqrt{25+16+9} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (Corollaire 15.1 (ii)).

15.5 Positions Relatives

Les vecteurs normaux décident de la position de deux plans, ou d'une droite et d'un plan. Deux droites de l'espace peuvent être parallèles, sécantes, ou non coplanaires.

Définition 15.8 (Droite et Plan Parallèles, Plans Parallèles). Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$.

(i) Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ est *parallèle* à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{w}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(ii) Un plan $\mathcal{P}'$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}'$, $\overrightarrow{v}'$ est *parallèle* à $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

(iii) Deux plans, ou une droite et un plan, sont *strictement parallèles* s'ils sont parallèles et n'ont aucun point commun.

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (il en existe, Corollaire 15.1 (i)). Par le Théorème 15.9 (ii), (i) s'écrit $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, et (ii) $\overrightarrow{u}' \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{n} = 0$: ces notions ne dépendent pas des vecteurs directeurs choisis (Définition 15.5).

Théorème 15.12 (Droite et Plan). Soient $\mathcal{D}$ une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{w}$, et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

(i) Si $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$: elle est contenue dans $\mathcal{P}$ si $A \in \mathcal{P}$, et strictement parallèle à $\mathcal{P}$ sinon.

(ii) Si $\vec{w} \cdot \vec{n} \neq 0$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un point commun et un seul.

Preuve. Soit B un point de $\mathcal{P}$. Un point M de $\mathcal{D}$ s'écrit $\overrightarrow{AM} = t\vec{w}$, et $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$ (Théorème 15.9 (iii)), c'est-à-dire $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + t\,\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ (relation de Chasles, Théorème 15.3 (ii)). (i) Si $\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$, $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ (Définition 15.8 (i), Théorème 15.9 (ii)), et la condition $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{n} + t\,\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ ne dépend pas de t : elle est vraie pour tout M de $\mathcal{D}$ si $A \in \mathcal{P}$ (cas $t = 0$), et fausse pour tout M sinon. (ii) Sinon, elle a une seule solution t.

Théorème 15.13 (Deux Plans). Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$.

(i) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont colinéaires. Deux plans parallèles sont confondus s'ils ont un point commun, et strictement parallèles sinon.

(ii) Sinon, ils sont *sécants* : leur intersection est une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$.

Preuve de (i). Soient $\overrightarrow{u}'$, $\overrightarrow{v}'$ des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}'$. Par la Définition 15.8, $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}' \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{n} = 0$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathcal{P}'$. Si c'est le cas, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont deux vecteurs normaux à $\mathcal{P}'$, donc colinéaires (Théorème 15.9 (iv)). Inversement, s'ils sont colinéaires, $\overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n}'$ (Théorème 14.4 (ii)), et $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}'$ et $\overrightarrow{v}'$ (Théorème 14.17 (ii)), donc normal à $\mathcal{P}'$. Si les plans sont parallèles et ont un point commun A, ils sont tous deux l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ (Théorème 15.9 (iii)).

Preuve du Théorème 15.13 (ii)

Preuve de (ii). Posons $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$: il est non nul et orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ (Théorème 15.11 (iv), (i)), et $\delta = \left\|\overrightarrow{n}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{n}'\right\|^2 - \left(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}'\right)^2 = \left\|\overrightarrow{w}\right\|^2 > 0$ (Théorème 15.11 (iii)). Soient O un point, $c = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{n}$ et $c' = \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{n}'$, où $A \in \mathcal{P}$ et $A' \in \mathcal{P}'$. Par le Théorème 15.9 (iii) et la relation de Chasles, M est dans les deux plans si et seulement si $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n} = c$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{n}' = c'$.

Étape 1 : un point commun. Cherchons M_0 avec $\overrightarrow{OM_0} = a\overrightarrow{n} + b\overrightarrow{n}'$. Les deux conditions deviennent $a\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2 + b\,\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}' = c$ et $a\,\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}' + b\left\|\overrightarrow{n}'\right\|^2 = c'$, un système dont le déterminant est $\delta \neq 0$; on vérifie en remplaçant que $a = \frac{c\left\|\overrightarrow{n}'\right\|^2 - c'\,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}'}{\delta}$ et $b = \frac{c'\left\|\overrightarrow{n}\right\|^2 - c\,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}'}{\delta}$ conviennent.

Preuve du Théorème 15.13 (ii), Suite

Étape 2 : l'intersection. M est dans les deux plans si et seulement si $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n}' = 0$. La famille $\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n}'\right)$ est libre, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ n'étant pas colinéaires (Définition 14.5 (i)) ; les vecteurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}'$, $\overrightarrow{w}$ forment donc une base (Théorème 15.9 (i), appliqué au plan passant par O de vecteurs directeurs $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}'$ et de vecteur normal $\overrightarrow{w}$). Écrivons $\overrightarrow{M_0M} = p\overrightarrow{n} + q\overrightarrow{n}' + r\overrightarrow{w}$: les deux conditions forment le système de l'étape 1, d'inconnues p, q, avec $c = c' = 0$. En multipliant la première équation par $\left\|\overrightarrow{n}'\right\|^2$, la seconde par $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}'$, et en soustrayant, on obtient $\delta p = 0$, donc $p = 0$; de même $q = 0$. Donc M est dans les deux plans si et seulement si $\overrightarrow{M_0M} = r\overrightarrow{w}$: c'est la droite passant par M_0 de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

Théorème du Toit

Théorème 15.14 (Théorème du Toit). Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles, contenues respectivement dans deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Alors la droite d'intersection Δ de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est parallèle à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$.

Preuve. Soient $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n}'$ des vecteurs normaux à $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ (Corollaire 15.1 (i)) ; ils ne sont pas colinéaires, car les plans sont sécants (Théorème 15.13). Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, donc de $\mathcal{D}'$ (Définition 14.6 (ii), (iii)). Comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$ pour deux points distincts A, B de $\mathcal{P}$, donc $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ (Définition 15.5) ; de même $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}' = 0$. La preuve du Théorème 15.13 (ii) (étape 2) montre alors que $\overrightarrow{w}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$, qui dirige Δ.

Théorème 15.15 (Deux Droites de l'Espace). Soient $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, et $\mathcal{D}'$ passant par A' de vecteur directeur $\overrightarrow{w}'$.

(i) Si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$ sont colinéaires, les droites sont parallèles : confondues si elles ont un point commun, et sans point commun sinon.

(ii) Sinon, elles ont au plus un point commun. Elles en ont un si et seulement si $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ sont coplanaires ; sinon, aucun plan ne les contient toutes les deux : elles sont *non coplanaires*.

Preuve. (i) Si les droites sont parallèles et ont un point commun B, chacune est la droite passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ (Théorème 14.5 (i)).

Preuve du Théorème 15.15 (ii)

(ii) Si M et N étaient deux points communs distincts, $\overrightarrow{MN}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{w}$ et à $\overrightarrow{w}'$ (Définition 14.6 (i)), qui seraient colinéaires. Un point commun s'écrit $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{A'M} = t'\overrightarrow{w}'$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AA'} = t\overrightarrow{w} - t'\overrightarrow{w}'$; comme $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}')$ est libre, de tels réels existent si et seulement si $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ sont coplanaires (Théorème 14.4 (iii)). Enfin, si un plan $\mathcal{Q}$ contient les deux droites, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ avec B, C dans $\mathcal{Q}$, donc orthogonaux à un vecteur $\overrightarrow{m}$ normal à $\mathcal{Q}$ (Corollaire 15.1 (i), Définition 15.5) : par le Théorème 15.9 (ii) appliqué au plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w}'$ (dont $\overrightarrow{m}$ est un vecteur normal), $\overrightarrow{AA'}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w}'$, et les droites ont un point commun.

Remarque 15.5 (Méthode). Pour deux droites données par des représentations paramétriques, on compare d'abord leurs vecteurs directeurs, puis on résout le système de trois équations $x_A + ta = x_{A'} + t'a'$, ..., d'inconnues t, t'.

Exemple : Deux Plans, une Droite et un Plan

Exemple 15.7 (Intersections). Dans un repère orthonormé direct, soient $\mathcal{P} : x + y + z - 3 = 0$, $\mathcal{P}' : x - y + 2z - 2 = 0$, et $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(0, 1, 0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1, 1, 1)$.

Étape 1 : les deux plans. Les vecteurs $\overrightarrow{n}(1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{n}'(1, -1, 2)$ sont normaux respectivement à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{P}'$ (Théorème 15.10 (ii)), et $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'(3, -1, -2)$ n'est pas nul : ils ne sont pas colinéaires (Théorème 15.11 (iv)). Les plans sont donc sécants, selon une droite dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ (Théorème 15.13 (ii)). Pour un point commun, prenons $z = 0 : x + y = 3$ et $x - y = 2$ donnent $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$. La droite d'intersection passe donc par $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Étape 2 : la droite et le plan $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 3 \neq 0$: $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point (Théorème 15.12 (ii)). Le point $(t, 1 + t, t)$ de $\mathcal{D}$ (Théorème 14.16 (i)) est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $3t + 1 - 3 = 0$, soit $t = \frac{2}{3}$: c'est $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

15.6 Distances et Sphère

La distance d'un point à un plan se lit sur une équation du plan. Elle décide de la position d'une sphère et d'un plan.

Distance d'un Point à un Plan

Définition 15.9 (Projeté Orthogonal sur un Plan, Distance). Soient $\mathcal{P}$ un plan, $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (Corollaire 15.1 (i)) et M_0 un point. La droite passant par M_0 de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ coupe $\mathcal{P}$ en un seul point H (Théorème 15.12 (ii), car $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$), le *projeté orthogonal* de M_0 sur $\mathcal{P}$; il ne dépend pas du vecteur normal choisi (Théorème 15.9 (iv), Théorème 14.5 (i)). La *distance* de M_0 à $\mathcal{P}$ est $d(M_0, \mathcal{P}) = M_0H$.

Théorème 15.16 (Distance d'un Point à un Plan). Soient $\mathcal{P}$ un plan et M_0 un point, de projeté orthogonal H sur $\mathcal{P}$.

(i) Pour tout point M de $\mathcal{P}$, $M_0M^2 = M_0H^2 + HM^2$: H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M_0.

(ii) Dans un repère orthonormé, si $\mathcal{P} : \alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$, alors
$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + d|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Preuve du Théorème 15.16, Distance à une Droite

Preuve. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal de la Définition 15.9. (i) $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0H} + \overrightarrow{HM}$, avec $\overrightarrow{M_0H} = t\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ (Théorème 15.9 (iii)) : $\overrightarrow{M_0H} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$, et le Théorème 15.3 (iv) conclut. (ii) On prend $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ (Théorème 15.10 (ii)). Par le Théorème 14.16 (i), H a pour coordonnées $(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta, z_0 + t\gamma)$; il est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + d + t\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right) = 0$. Donc, comme $\left\|\overrightarrow{n}\right\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ (Théorème 14.18 (ii)), $M_0H = |t| \left\|\overrightarrow{n}\right\| = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + d|}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Corollaire 15.2 (Distance d'un Point à une Droite). Dans un repère orthonormé du plan, soient $\mathcal{D} : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$. Le projeté orthogonal H de M_0 sur $\mathcal{D}$ est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M_0. La *distance* de M_0 à $\mathcal{D}$ est $d(M_0, \mathcal{D}) = M_0H$, et

$$d(M_0, \mathcal{D}) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Preuve du Corollaire 15.2 et Exemple

Preuve. Le projeté H existe et est unique (Théorème 15.6 (i)). La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $(-\beta, \alpha)$ (Théorème 14.13). Par la Définition 15.3, $\overrightarrow{HM_0}$, donc $\overrightarrow{M_0H}$, est orthogonal à $(-\beta, \alpha)$ (Théorème 14.17 (ii)). Par l'argument du début de la preuve du Théorème 15.8, appliqué à $(-\beta, \alpha)$, un vecteur est orthogonal à $(-\beta, \alpha)$ si et seulement s'il est colinéaire à $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$: donc $\overrightarrow{M_0H} = t\overrightarrow{n}$ (Théorème 14.4 (ii)). Comme dans la preuve du Théorème 15.16, avec deux coordonnées, $H(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta)$ est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma + t\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = 0$, et $M_0M^2 = M_0H^2 + HM^2$ pour tout M de $\mathcal{D}$, car $\overrightarrow{HM}$, colinéaire à $(-\beta, \alpha)$, est orthogonal à $\overrightarrow{M_0H}$ (Théorèmes 15.4 et 15.3 (iv)).

Exemple 15.8 (Deux Distances). Dans un repère orthonormé de l'espace, la distance de O au plan $2x - y + 2z - 6 = 0$ est $\frac{|-6|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$ (Théorème 15.16 (ii)). Dans un repère orthonormé du plan, la distance de $M_0(1, 1)$ à la droite $3x + 4y + 3 = 0$ est $\frac{|3+4+3|}{5} = 2$ (Corollaire 15.2).

Définition 15.10 (Sphère). Soient Ω un point et $R > 0$. La *sphère* de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\Omega M = R$.

Théorème 15.17 (Équation d'une Sphère). Dans un repère orthonormé, soit $\Omega\,(a, b, c)$.

(i) La sphère de centre Ω et de rayon R a pour équation $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

(ii) Soit e un réel. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M\,(x, y, z)$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0$ est, si $k = a^2 + b^2 + c^2 - e$: la sphère de centre Ω et de rayon $\sqrt{k}$ si $k > 0$; le point Ω si $k = 0$; l'ensemble vide si $k < 0$.

Preuve. (i) $\Omega M = R$ si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$, car $\Omega M \geq 0$ et $R > 0$; on conclut par le Théorème 14.18 (ii). (ii) L'équation s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = k$, c'est-à-dire $\Omega M^2 = k$. Si $k > 0$, on applique (i) avec $R = \sqrt{k}$; si $k = 0$, $\Omega M = 0$ si et seulement si $M = \Omega$; si $k < 0$, aucun point ne convient.

Sphère et Plan

Théorème 15.18 (Sphère et Plan). Soient $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R, $\mathcal{P}$ un plan, H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{P}$, et $h = d(\Omega, \mathcal{P})$.

(i) Si $h > R$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun.

(ii) Si $h = R$, ils ont un seul point commun, H : on dit que $\mathcal{P}$ est *tangent* à $\mathcal{S}$ en H.

(iii) Si $h < R$, leur intersection est le cercle de $\mathcal{P}$ de centre H et de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$.

Preuve. Par le Théorème 15.16 (i), un point M de $\mathcal{P}$ vérifie $\Omega M^2 = h^2 + HM^2$; il est sur $\mathcal{S}$ si et seulement si $HM^2 = R^2 - h^2$. Si $h > R$, c'est impossible ; si $h = R$, cela donne $M = H$; si $h < R$, cela dit que M est à la distance $\sqrt{R^2 - h^2}$ de H.

Exemple : une Sphère et Deux Plans

Exemple 15.9 (Une Sphère et Deux Plans). Dans un repère orthonormé, soit $\mathcal{S} : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$. Ici $(a, b, c) = (1, -2, 3)$ et $k = 1 + 4 + 9 - 5 = 9 : \mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega\,(1, -2, 3)$ et de rayon 3 (Théorème 15.17 (ii)). Le plan $2x - y + 2z - 1 = 0$ est à la distance $\frac{|2+2+6-1|}{3} = 3$ de Ω : il est tangent à $\mathcal{S}$, en $H\,(-1, -1, 1)$ ($t = -1$ dans la preuve du Théorème 15.16). Le plan $2x - y + 2z - 4 = 0$ est à la distance $\frac{6}{3} = 2 < 3$: il coupe $\mathcal{S}$ selon un cercle de rayon $\sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ (Théorème 15.18).

À retenir

On retient la définition du produit scalaire et ses calculs, le critère d'orthogonalité, les vecteurs normaux et les critères de position, puis les formules de distance, en sachant pour chacune si elle demande un repère orthonormé, ou orthonormé direct.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)$, égal à $xx' + yy'$ $(+zz')$ en repère orthonormé ; $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ (Définition 15.1, Théorèmes 15.2 à 15.4).
- Pour $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \cos\theta$; projeté orthogonal ; Al-Kashi ; médiane (Théorèmes 15.5 à 15.7).
- En repère orthonormé : (α, β) est normal à la droite $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; (α, β, γ) est normal au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, et toute telle équation est celle d'un plan (Théorèmes 15.8 à 15.10).
- En repère orthonormé direct : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, nul si et seulement s'ils sont colinéaires (Théorème 15.11) ; pour A, B, C non alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal à (ABC), et l'aire de ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$ (Corollaire 15.1).
- Droite et plan : parallèles si et seulement si $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, sinon un seul point commun ; deux plans : parallèles si et seulement si leurs normales sont colinéaires, sinon une droite dirigée par $\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$; deux droites : parallèles, sécantes ou non coplanaires (Théorèmes 15.12 à 15.15).
- $d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + d|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$; sphère et plan à la distance h du centre : aucun point, un point ou un cercle de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$, selon que $h > R$, $h = R$ ou $h < R$ (Théorèmes 15.16 à 15.18).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.