Cours 17

Dénombrement, Combinatoire

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

14 novembre 2026

Plan

Introduction

17.1 Cardinal d'un Ensemble Fini

17.2 Listes

17.3 Arrangements et Permutations

17.4 Combinaisons

17.5 Propriétés des Coefficients Binomiaux

17.6 Tirages

À retenir

Introduction

Dénombrer, c'est compter les éléments d'un ensemble fini sans les énumérer un par un. Deux règles suffisent : on ajoute quand on sépare en cas, on multiplie quand on choisit en plusieurs étapes.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le langage des ensembles : réunion, intersection, complémentaire, produit cartésien (cours 19 [5]) ; le raisonnement par récurrence (cours 1 [1]).
- **Les objets :** le cardinal d'un ensemble fini ; les p-listes, les arrangements, les permutations, les combinaisons ; les coefficients binomiaux et la formule du binôme.
- **Ce qu'on saura faire :** reconnaître le bon modèle (l'ordre compte-t-il ? peut-on répéter ?) ; compter par cas, par étapes ou par le complémentaire ; développer $(x+y)^n$.
- **Et ensuite :** les probabilités sur un univers fini (cours 7 [2]) et la loi binomiale (cours 10 [3]) utilisent ces résultats.

Dans toute la leçon, n, p, k désignent des entiers naturels, et E un ensemble fini.

17.1 Cardinal d'un Ensemble Fini

Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments. On le calcule en découpant l'ensemble en morceaux disjoints, ou en l'écrivant comme un produit.

Définition 17.1 (Ensemble Fini, Cardinal). Soit $n \geq 1$ un entier. Un ensemble E a n *éléments* si l'on peut écrire $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, les x_i étant deux à deux distincts : on a numéroté les éléments de E, chacun recevant exactement un numéro. On dit que E est *fini*, et que n est son *cardinal*, noté $\mathrm{Card}\,(E)$. L'ensemble vide est fini, de cardinal 0.

Propriété 17.1 (Principe Additif). Soient A et B deux ensembles finis.

(i) Le nombre n de la Définition 17.1 ne dépend pas de la numérotation choisie.

(ii) Toute partie de A est un ensemble fini.

(iii) Si A et B sont *disjoints* ($A \cap B = \emptyset$), alors $A \cup B$ est fini et $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$.

Cette propriété est admise.

Théorème 17.1 (Cardinal d'une Réunion). Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E, et $\bar{A} = E \setminus A$ le complémentaire de A dans E.

(i) $\mathrm{Card}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{Card}\left(E\right) - \mathrm{Card}\left(A\right)$; en particulier, $\mathrm{Card}\left(A\right) \leq \mathrm{Card}\left(E\right)$.

(ii) $\mathrm{Card}\left(A \cup B\right) = \mathrm{Card}\left(A\right) + \mathrm{Card}\left(B\right) - \mathrm{Card}\left(A \cap B\right)$.

(iii) Si $A_1, \ldots, A_k$ $(k \geq 1)$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, leur réunion est finie et $\mathrm{Card}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_k\right) = \mathrm{Card}\left(A_1\right) + \cdots + \mathrm{Card}\left(A_k\right)$.

(iv) Si, de plus, les A_i ont tous m éléments, leur réunion a km éléments.

Remarque 17.1 (Compter par Correspondance). S'il existe une bijection f d'un ensemble fini A sur un ensemble B, alors B est fini et $\mathrm{Card}\left(B\right) = \mathrm{Card}\left(A\right)$: si A est vide, B l'est aussi ; sinon, si $x_1, \ldots, x_n$ numérotent A, alors $f\left(x_1\right), \ldots, f\left(x_n\right)$ numérotent B. On compte ainsi un ensemble en le mettant en correspondance avec un ensemble déjà compté.

Preuve du Théorème 17.1

Preuve. Les parties de E sont finies (Propriété 17.1 (ii)). (i) E est la réunion des parties disjointes A et $\bar{A}$: $\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(\bar{A})$ (Propriété 17.1 (iii)). (ii) $A \cup B$ est la réunion des parties disjointes A et $B \setminus A$, et B celle de $A \cap B$ et $B \setminus A$:
$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B \setminus A)$ et $\mathrm{Card}\,(B) = \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(B \setminus A)$; on retranche. (iii) Par récurrence sur k (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]) : le cas $k = 1$ est clair, et $A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1}$ est la réunion de $A_1 \cup \cdots \cup A_k$, finie par l'hypothèse de récurrence, et de A_{k+1}, qui en est disjoint : on applique la Propriété 17.1 (iii). (iv) La somme de (iii) a k termes égaux à m.

Lire le Théorème 17.1

Lire le théorème. Dans la somme $\mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B)$, les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois : on les retranche une fois (ii). Compter le complémentaire (i) est souvent plus court : c'est la méthode pour « au moins un ». Le point (iv) dit qu'on compte par paquets de même taille : k paquets de m éléments font km éléments.

Exemple 17.1 (Une Classe). Dans une classe de 30 élèves, 18 jouent au football, 12 au basket, et 5 aux deux. Soient F et B ces deux ensembles d'élèves.

(i) Le nombre d'élèves qui pratiquent au moins l'un des deux sports est $\mathrm{Card}\,(F \cup B) = 18 + 12 - 5 = 25$ (Théorème 17.1 (ii)).

(ii) Le nombre d'élèves qui ne pratiquent aucun des deux est $\mathrm{Card}\left(\overline{F \cup B}\right) = 30 - 25 = 5$ (Théorème 17.1 (i)).

(iii) Le nombre d'élèves qui ne pratiquent que le football est $\mathrm{Card}\,(F \setminus B) = 18 - 5 = 13$, car F est la réunion des parties disjointes $F \cap B$ et $F \setminus B$.

Théorème 17.2 (Cardinal d'un Produit). Soient $A_1, \ldots, A_k$ des ensembles finis, $k \geq 2$. Le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_k$, ensemble des k-uplets $(a_1, \ldots, a_k)$ tels que $a_i \in A_i$ pour tout i, est fini et

$$\mathrm{Card}\,(A_1 \times \cdots \times A_k) = \mathrm{Card}\,(A_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}\,(A_k)\,.$$

Preuve. Cas $k = 2$. Si A_1 ou A_2 est vide, le produit est vide, et les deux membres valent 0. Sinon, $A_1 \times A_2$ est la réunion, pour $a \in A_1$, des parties $\{a\} \times A_2$, deux à deux disjointes (leurs couples n'ont pas la même première composante). Chacune est en bijection avec A_2 par $b \mapsto (a, b)$: elle a $\mathrm{Card}\,(A_2)$ éléments (Remarque 17.1). Il y a $\mathrm{Card}\,(A_1)$ parties, d'où le résultat par le Théorème 17.1 (iv). Cas général : par récurrence sur k (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]), car $(a_1, \ldots, a_{k+1}) \mapsto ((a_1, \ldots, a_k), a_{k+1})$ est une bijection de $A_1 \times \cdots \times A_{k+1}$ sur $(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$.

Principe Multiplicatif

Théorème 17.3 (Choix Successifs). On fait un choix en $k \geq 2$ étapes successives. On suppose qu'il y a n_1 possibilités à la première étape, et, pour chaque $i \in \{2, \ldots, k\}$, quels que soient les choix faits aux étapes précédentes, exactement n_i possibilités à l'étape i. Alors le nombre de choix complets est $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Preuve. Si l'un des n_i est nul, il n'y a aucun choix complet, et le produit est nul. Supposons les n_i non nuls. Un choix complet est un k-uplet $(c_1, \ldots, c_k)$. Par récurrence sur k (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]) : pour k étapes, les choix complets se répartissent selon leurs $k-1$ premières composantes ; il y a $n_1 \times \cdots \times n_{k-1}$ débuts possibles (hypothèse de récurrence ; pour $k = 2$, il y en a n_1), et chacun se prolonge d'exactement n_k façons. Les choix complets forment donc $n_1 \times \cdots \times n_{k-1}$ paquets disjoints de n_k éléments, et le Théorème 17.1 (iv) conclut.

Lire le théorème. On représente les choix par un *arbre* : n_1 branches au départ, puis n_2 branches au bout de chacune, etc. Les possibilités d'une étape peuvent dépendre des choix précédents ; seul leur *nombre* doit en être indépendant. Quand elles n'en dépendent pas, on retrouve le Théorème 17.2.

Exemples

Exemple 17.2 (Menus et Codes).

(i) Un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 2 desserts. Un menu est un triplet (entrée, plat, dessert) : il y a $3 \times 4 \times 2 = 24$ menus (Théorème 17.2).

(ii) Un code est formé d'une lettre parmi 26, suivie de deux chiffres *distincts* parmi 10. Il y a 26 choix pour la lettre, 10 pour le premier chiffre, puis 9 pour le second, quel que soit le premier : $26 \times 10 \times 9 = 2340$ codes (Théorème 17.3). Les possibilités de la troisième étape dépendent du premier chiffre, mais pas leur nombre.

Remarque 17.2 (Additionner ou Multiplier). On *additionne* quand on sépare les cas (« ou », parties disjointes : Théorème 17.1 (iii)) ; on *multiplie* quand on enchaîne des choix (« puis » : Théorèmes 17.2 et 17.3).

17.2 Listes

Une liste est une suite ordonnée d'éléments, avec répétition permise : c'est un élément d'un produit cartésien.

Définition 17.2 (p-Liste). Soient E un ensemble fini et $p \geq 1$ un entier. Une *p-liste* d'éléments de E est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ d'éléments de E, c'est-à-dire un élément de $E^p = E \times \cdots \times E$ (p facteurs). L'ordre compte, et un même élément peut figurer plusieurs fois.

Théorème 17.4 (Nombre de p-Listes). Si $\mathrm{Card}\,(E) = n$, le nombre de p-listes d'éléments de E est $\mathrm{Card}\,(E^p) = n^p$.

Preuve. Pour $p = 1$, une 1-liste (x_1) correspond à l'élément x_1 (Remarque 17.1). Pour $p \geq 2$, c'est le Théorème 17.2 avec $A_1 = \cdots = A_p = E$.

Remarque 17.3 (Listes et Applications). Une p-liste $(x_1, \ldots, x_p)$ est la donnée de l'application $f : \{1, \ldots, p\} \to E$, $f(i) = x_i$. Il y a donc n^p applications de $\{1, \ldots, p\}$ dans un ensemble à n éléments (Théorème 17.4 et Remarque 17.1).

Exemple 17.3 (Pile ou Face, Codes). On lance k fois une pièce : un résultat est une k-liste de $\{P, F\}$, il y en a 2^k. Un code de 4 chiffres est une 4-liste de $\{0, 1, \ldots, 9\}$: il y en a $10^4 = 10\,000$.

17.3 Arrangements et Permutations

Un arrangement est une liste sans répétition ; une permutation range tous les éléments d'un ensemble dans un certain ordre.

Définition 17.3 (Factorielle). Pour tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (« factorielle n »), et l'on convient que $0! = 1$. Ainsi $(n+1)! = (n+1) \times n!$ pour tout $n \geq 0$. C'est la factorielle de la Définition 10.7 du cours 10 [3].

Définition 17.4 (Arrangement). Soient E un ensemble fini et $p \geq 1$ un entier. Un *arrangement* de p éléments de E est une p-liste d'éléments de E *deux à deux distincts* : l'ordre compte, sans répétition.

Théorème 17.5 (Nombre d'Arrangements). Soient E un ensemble à n éléments et $p \geq 1$.

(i) Si $p \leq n$, le nombre d'arrangements de p éléments de E est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

(ii) Si $p > n$, il n'y en a aucun.

Preuve du Théorème 17.5

Preuve. (i) On choisit x_1, puis x_2, …, puis x_p. Il y a n choix pour x_1 ; pour $2 \leq i \leq p$, quels que soient $x_1, \ldots, x_{i-1}$, deux à deux distincts, il reste $n-(i-1)$ choix pour x_i : les éléments de E autres que $x_1, \ldots, x_{i-1}$ (Théorème 17.1 (i)). Pour $p = 1$, il y a n arrangements (Théorème 17.4) ; pour $p \geq 2$, le Théorème 17.3 donne $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ arrangements. Enfin

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{1 \times \cdots \times (n-p) \times (n-p+1) \times \cdots \times n}{1 \times \cdots \times (n-p)} = (n-p+1) \times \cdots \times n,$$

ce qui reste vrai pour $p = n$, car $0! = 1$.

(ii) Si $(x_1, \ldots, x_p)$ était un arrangement avec $p > n$, la partie $\{x_1, \ldots, x_p\}$ de E aurait p éléments (ils sont numérotés sans répétition), donc plus que E : c'est impossible (Théorème 17.1 (i)).

Exemple 17.4 (Un Podium). 8 coureurs disputent une course ; un podium (premier, deuxième, troisième) est un arrangement de 3 coureurs parmi 8 : il y en a $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

Permutations

Définition 17.5 (Permutation). Soit E un ensemble à $n \geq 1$ éléments. Une *permutation* de E est un arrangement de n éléments de E : une n-liste où chaque élément de E figure exactement une fois, c'est-à-dire une façon de ranger tous les éléments de E dans un ordre.

Corollaire 17.1 (Nombre de Permutations). Un ensemble à $n \geq 1$ éléments a $n!$ permutations.

Preuve. C'est le Théorème 17.5 (i) avec $p = n$: $A_n^n = \dfrac{n!}{0!} = n!$. Une n-liste d'éléments distincts contient bien chaque élément de E une fois, car la partie formée de ses termes a n éléments, donc est E (Théorème 17.1 (i) : son complémentaire a 0 élément).

Exemple 17.5 (Ranger des Livres). On peut ranger 5 livres distincts sur une étagère de $5! = 120$ façons. Les anagrammes du mot LIVRE (Exemple 17.6), dont les 5 lettres sont distinctes, sont les 120 permutations de ses lettres.

Anagrammes avec Lettres Répétées

Exemple 17.6 (Les Anagrammes de ELLE). Une *anagramme* d'un mot est un mot formé des mêmes lettres, chacune autant de fois.

Étape 1 : rendre les lettres distinctes. On numérote les lettres : $E_1 L_1 L_2 E_2$. Les mots formés de ces 4 symboles distincts sont leurs $4! = 24$ permutations (Corollaire 17.1).

Étape 2 : regrouper. Effacer les numéros envoie chacun de ces 24 mots sur une anagramme de ELLE. Une anagramme donnée, par exemple LEEL, provient d'exactement $2! \times 2! = 4$ mots numérotés : 2! façons de placer E_1, E_2 aux places des E, puis 2! de placer L_1, L_2 (Corollaire 17.1 et Théorème 17.3).

Étape 3 : conclure. Les anagrammes forment un ensemble fini, partie de $\{E, L\}^4$ (Théorème 17.4, Propriété 17.1 (ii)). Les 24 mots numérotés forment autant de paquets disjoints de 4 éléments qu'il y a d'anagrammes : il y en a $24/4 = 6$ (Théorème 17.1 (iv)). Ce sont EELL, ELEL, ELLE, LEEL, LELE, LLEE.

De même, un mot de n lettres où les lettres distinctes figurent $n_1, \ldots, n_r$ fois ($n_1 + \cdots + n_r = n$) a $n!/(n_1! \cdots n_r!)$ anagrammes.

17.4 Combinaisons

Une combinaison est une partie : l'ordre ne compte plus. On compte les parties à p éléments à partir des arrangements.

Définition 17.6 (Combinaison). Soient E un ensemble fini et p un entier naturel. Une *combinaison* de p éléments de E est une partie de E à p éléments : l'ordre ne compte pas, sans répétition.

Théorème 17.6 (Nombre de Combinaisons). Soient E un ensemble à n éléments et $0 \leq p \leq n$. Le nombre de parties de E à p éléments est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Il ne dépend que de n et p ; on l'appelle *coefficient binomial*, noté aussi C_n^p, et on lit « p parmi n ».

Preuve du Théorème 17.6

Preuve. Si $p = 0$, la seule partie à 0 élément est $\emptyset$, et $\dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$. Soit $1 \leq p \leq n$. L'ensemble des parties de E à p éléments est fini : choisir pour chacune l'un de ses arrangements le met en bijection avec une partie de l'ensemble fini des arrangements, et la Remarque 17.1, appliquée à la bijection réciproque, conclut avec la Propriété 17.1 (ii). Soit N le cardinal de l'ensemble des parties de E à p éléments. À chaque arrangement $(x_1, \ldots, x_p)$, associons la partie $\{x_1, \ldots, x_p\}$, qui a p éléments. Une partie à p éléments donnée provient d'exactement $p!$ arrangements : les permutations de ses éléments (Corollaire 17.1). Les A_n^p arrangements forment ainsi N paquets disjoints de $p!$ éléments, donc $A_n^p = N \times p!$ (Théorème 17.1 (iv)), et $N = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ (Théorème 17.5).

Lire le Théorème 17.6

Remarque 17.4 (Lien avec le Cours 10). La formule du Théorème 17.6 est celle par laquelle la Définition 10.7 du cours 10 définit $\binom{n}{k}$; le Théorème 17.6 démontre ainsi le Théorème 10.9, admis dans le cours 10 [3]. Pour $p > n$, il n'y a aucune partie à p éléments (Théorème 17.1 (i)) ; on ne définit pas $\binom{n}{p}$ dans ce cas.

Exemple 17.7 (Calculs).

(i) Les parties à deux éléments de $\{1,2,3,4\}$ sont $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$: il y en a $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!\,2!} = 6$.

(ii) Un comité de 3 personnes choisies parmi 10 est une partie à 3 éléments : il y en a $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$. Si les trois membres ont des rôles distincts (président, secrétaire, trésorier), c'est un arrangement : il y en a $A_{10}^3 = 720 = 3! \times 120$.

Lire le théorème. En pratique, $\binom{n}{p} = n(n-1)\cdots(n-p+1)/p!$: p facteurs en haut, p en bas.

Tableau Récapitulatif

Quand on choisit p éléments parmi les n éléments de E, on se pose deux questions : l'*ordre* compte-t-il ? peut-on *répéter* un élément ?

	Avec répétition	**Sans répétition** ($p \leq n$)
L'ordre compte	p-listes : n^p (Théorème 17.4)	arrangements : A_n^p (Théorème 17.5)
L'ordre ne compte pas		combinaisons : $\binom{n}{p}$ (Théorème 17.6)

Les permutations sont les arrangements de n éléments parmi n : il y en a $n!$ (Corollaire 17.1). La case vide correspond aux « combinaisons avec répétition » (choisir p éléments, sans ordre, un élément pouvant être pris plusieurs fois) ; elles ne sont pas étudiées dans cette leçon.

17.5 Propriétés des Coefficients Binomiaux

Les coefficients binomiaux sont symétriques, se calculent de proche en proche par le triangle de Pascal, et sont les coefficients du développement de $(x+y)^n$.

Symétrie et Formule de Pascal

Théorème 17.7 (Propriétés). Soit $n \geq 0$ un entier.

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, et $\binom{n}{1} = n$ si $n \geq 1$.

(ii) *Symétrie :* $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ pour tout $p \in \{0, \ldots, n\}$.

(iii) *Formule de Pascal :* si $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

Preuve. Soit E un ensemble à n éléments. (i) Les seules parties à 0 et n éléments sont $\emptyset$ et E (Théorème 17.1 (i)) ; les parties à un élément sont les $\{x\}$, $x \in E$, et $x \mapsto \{x\}$ est une bijection (Remarque 17.1). (ii) L'application $A \mapsto \bar{A}$ envoie les parties à p éléments sur celles à $n-p$ éléments (Théorème 17.1 (i)), et c'est une bijection, car $\bar{\bar{A}} = A$ (Remarque 17.1). (iii) Fixons $a \in E$; $E \setminus \{a\}$ a $n-1$ éléments. Les parties de E à p éléments qui ne contiennent pas a sont les parties de $E \setminus \{a\}$ à p éléments : il y en a $\binom{n-1}{p}$. Celles qui contiennent a correspondent, par $A \mapsto A \setminus \{a\}$, aux parties de $E \setminus \{a\}$ à $p-1$ éléments, de réciproque $B \mapsto B \cup \{a\}$: il y en a $\binom{n-1}{p-1}$. On additionne (Propriété 17.1 (iii)).

Remarque 17.5 (Preuve par le Calcul). La symétrie (ii) se lit aussi sur la formule du Théorème 17.6. Pour (iii), avec $F = (n-1)!/\left[(p-1)!\,(n-p-1)!\right]$:

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{F}{n-p} + \frac{F}{p} = \frac{F\,n}{p\,(n-p)} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \binom{n}{p}.$$

Par la formule de Pascal, chaque nombre intérieur ($1 \leq p \leq n-1$) est la somme de celui du dessus et de celui du dessus à gauche, et les extrémités valent 1 (Théorème 17.7 (i)) ; à la ligne $n = 5$, par exemple, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Théorème 17.8 (Binôme de Newton). Soient x et y deux nombres réels ou complexes (cours 12 [4]), et $n \geq 0$ un entier. Avec la convention $z^0 = 1$ pour tout nombre z,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

et, pour $n \geq 3$, en écrivant tous les termes,

$$(x+y)^n = y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + x^n.$$

Preuve du Théorème 17.8

Preuve. Par récurrence sur n (Théorème 1.13 du cours 1 [1]). Pour $n = 0$, les deux membres valent 1. Si la formule est vraie au rang n, alors

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}.$$

Dans la première somme, on remplace k par $k-1$ (k allant de 1 à $n+1$) et on isole le terme $k = n+1$, soit x^{n+1} ; dans la seconde, on isole le terme $k = 0$, soit y^{n+1} :

$$(x+y)^{n+1} = y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]x^k y^{n+1-k} + x^{n+1}.$$

Si $n = 0$, la somme du milieu est vide ; si $n \geq 1$, la formule de Pascal (Théorème 17.7 (iii), au rang $n+1 \geq 2$) donne $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ pour $1 \leq k \leq n$. Avec $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$, on obtient le rang $n+1$.

Exemple 17.8 (Développements). Avec la ligne $n = 4$ du triangle de Pascal, $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$. Avec la ligne $n = 3$, $(2x-1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 + (-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

Corollaire 17.2 (Sommes de Coefficients). Pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, et, si $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Preuve. Le Théorème 17.8 avec $x = y = 1$, puis avec $x = -1$ et $y = 1$: $(-1+1)^n = 0$ si $n \geq 1$.

Nombre de Parties d'un Ensemble

Théorème 17.9 (Nombre de Parties). L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E à n éléments a 2^n éléments.

Preuve. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, soit $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des parties de E à k éléments. Toute partie de E est finie, de cardinal compris entre 0 et n (Propriété 17.1 (ii), Théorème 17.1 (i)) : $\mathcal{P}(E)$ est la réunion des $\mathcal{P}_k$, deux à deux disjoints. Le Théorème 17.1 (iii), le Théorème 17.6 et le Corollaire 17.2 donnent $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

17.6 Tirages

Tirer des boules dans une urne, c'est choisir des éléments : selon la façon de tirer, le résultat est une liste, un arrangement ou une partie.

Modéliser un Tirage

Remarque 17.6 (Trois Façons de Tirer). Une urne contient n boules, que l'on suppose discernables (numérotées, par exemple). On en tire p.

(i) *Tirages successifs avec remise* ($p \geq 1$) : on remet chaque boule avant de tirer la suivante. Un résultat est une p-liste de boules : il y en a n^p (Théorème 17.4).

(ii) *Tirages successifs sans remise* ($1 \leq p \leq n$) : un résultat est un arrangement de p boules : il y en a A_n^p (Théorème 17.5).

(iii) *Tirage simultané* ($0 \leq p \leq n$) : on tire les p boules d'un coup ; un résultat est une partie à p éléments : il y en a $\binom{n}{p}$ (Théorème 17.6).

Si le tirage se fait « au hasard », on munit l'ensemble des résultats de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [2]). Le choix du modèle se lit dans l'énoncé : il faut le dire avant de compter.

Un Exemple de Tirage

Remarque 17.7 (Au Moins, Au Plus, Exactement). « Au moins un » se compte souvent par le complémentaire, « aucun » (Théorème 17.1 (i)) ; « exactement k », par un produit (Théorème 17.2 et Remarque 17.1) ; « au plus k », en séparant les cas « exactement 0 », …, « exactement k » (Théorème 17.1 (iii)).

Exemple 17.9 (Boules Rouges et Vertes). Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules vertes, discernables. On en tire 3 simultanément, au hasard.

Étape 1 : l'univers. Un résultat est une partie à 3 éléments des 8 boules : il y en a $\binom{8}{3} = 56$ (Théorème 17.6).

Étape 2 : exactement deux rouges. Un tel tirage est la donnée d'une partie à 2 éléments des 5 rouges et d'une partie à 1 élément des 3 vertes (sa réunion avec la première redonne le tirage) : il y en a $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30$ (Théorèmes 17.2 et 17.6, Remarque 17.1).

Étape 3 : au moins une rouge. Le complémentaire est « aucune rouge » : les 3 vertes, soit $\binom{3}{3} = 1$ tirage. Il y a donc $56 - 1 = 55$ tirages avec au moins une rouge (Théorème 17.1 (i)).

Un Exemple de Tirage (suite)

Étape 4 : au plus une rouge. On sépare les cas : aucune rouge (1 tirage) ou exactement une rouge ($\binom{5}{1} \times \binom{3}{2} = 15$ tirages), soit 16 tirages (Théorème 17.1 (iii)).

Étape 5 : probabilités. Par le Théorème 7.2 du cours 7 [2],

$$\mathrm{P}(\text{exactement deux rouges}) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \text{ et } \mathrm{P}(\text{au moins une rouge}) = \frac{55}{56}.$$

À retenir

On retient les deux principes, additif et multiplicatif, les nombres de listes, d'arrangements, de permutations et de combinaisons, et la formule du binôme.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- On additionne pour des parties disjointes ; $\text{Card}\left(\bar{A}\right) = \text{Card}\left(E\right) - \text{Card}\left(A\right)$ et $\text{Card}\left(A \cup B\right) = \text{Card}\left(A\right) + \text{Card}\left(B\right) - \text{Card}\left(A \cap B\right)$ (Propriété 17.1, Théorème 17.1).
- On multiplie pour un produit cartésien ou des choix successifs dont le nombre ne dépend pas des choix précédents (Théorèmes 17.2 et 17.3).
- p-listes : n^p ; arrangements : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$; permutations : $n!$ (Théorèmes 17.4, 17.5, Corollaire 17.1).
- Parties à p éléments : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ pour $0 \leq p \leq n$ (Théorème 17.6) ; symétrie et formule de Pascal (Théorème 17.7).
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$; $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, nombre de parties d'un ensemble à n éléments (Théorème 17.8, Corollaire 17.2, Théorème 17.9).
- Tirages successifs avec remise, sans remise, simultanés : listes, arrangements, combinaisons (Remarque 17.6).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.