Cours 18

Les Matrices

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

14 novembre 2026

Plan

Introduction

18.1 Matrices et Premières Opérations

18.2 Produit de Matrices

18.3 Puissances d'une Matrice Carrée

18.4 Déterminant et Matrice Inverse

18.5 Systèmes Linéaires

18.6 Matrices Diagonalisables et Suites

À retenir

Introduction

Une matrice est un tableau de nombres. On additionne les matrices, on les multiplie, on les inverse parfois : ce calcul résume en une seule égalité un système d'équations, ou l'évolution d'une suite de couples de nombres.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le raisonnement par récurrence et les suites géométriques (cours 1 [1]) ; les systèmes de deux équations à deux inconnues et les droites du plan (cours 14 [2]) ; les coefficients binomiaux et la formule du binôme (cours 17 [3]).
- **Les objets :** les matrices, leur somme, leur produit, leurs puissances ; le déterminant d'ordre 2 et 3 ; la matrice inverse ; les systèmes linéaires.
- **Ce qu'on saura faire :** calculer avec des matrices ; reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse ; résoudre un système par l'inverse ou par la méthode de Gauss ; calculer A^k quand $A = PDP^{-1}$.
- **Et ensuite :** les isométries du plan (cours 20 [4]), dont la symétrie de centre O de l'Exemple 18.15.

Dans toute la leçon, les matrices sont à coefficients réels, et n, p, q désignent des entiers naturels non nuls.

18.1 Matrices et Premières Opérations

On définit les matrices et quelques familles particulières, puis la transposée, la somme et le produit par un réel, qui se calculent coefficient par coefficient.

Définition 18.1 (Matrice, Type). Une *matrice de type* (n, p) est un tableau A de nombres réels à n lignes et p colonnes. On note a_{ij} le *coefficient* de la ligne i et de la colonne j $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p)$, et $A = (a_{ij})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Deux matrices sont *égales* si elles ont le même type et les mêmes coefficients : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple 18.1 (Une Matrice de Type $(2,3)$). $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a 2 lignes et 3 colonnes ; le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne est $a_{12} = -1$.

Définition 18.2 (Matrices Particulières). Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (n, p).

(i) Si $p = 1$, A est une *matrice colonne* ; si $n = 1$, une *matrice ligne*.

(ii) La matrice dont tous les coefficients sont nuls est la *matrice nulle*, notée $0_{n,p}$, ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté.

(iii) Si $n = p$, A est une *matrice carrée d'ordre n* ; on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n. Les *coefficients diagonaux* d'une matrice carrée sont $a_{11}, \ldots, a_{nn}$.

(iv) Une matrice carrée est *diagonale* si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$; elle est *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ (resp. $i < j$).

(v) La *matrice identité* d'ordre n, notée I_n, ou I, est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1.

Par exemple, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonale, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 18.3 (Transposée, Matrice Symétrique). La *transposée* de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice $A^{\mathrm{T}} = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq n$: les lignes de A deviennent les colonnes de A^{T}. Une matrice carrée A est *symétrique* si $A^{\mathrm{T}} = A$.

Exemple 18.2 (Transposées). La transposée de la matrice A de l'Exemple 18.1 est

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique ; la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne l'est pas, car sa transposée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Somme et Produit par un Réel

Définition 18.4 (Somme, Produit par un Réel). Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et λ un réel.

(i) La *somme* $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{ij} + b_{ij}$.

(ii) Le *produit* λA est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de coefficients λa_{ij}.

(iii) L'*opposée* de A est $-A = (-1)A$, et la *différence* est $A - B = A + (-B)$.

On ne définit pas la somme de deux matrices de types différents.

Exemple 18.3 (Calculs Coefficient par Coefficient). Avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad 2A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 10 \\ -8 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Théorème 18.1 (Règles de la Somme et du Produit par un Réel). Pour toutes les matrices A, B, C de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et tous réels λ, μ :

(i) $A+B=B+A$ (*commutativité*) ; $(A+B)+C=A+(B+C)$ (*associativité*) ; $A+0=0+A=A$ (0 est *élément neutre*) ; $A+(-A)=0$;

(ii) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$; $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$; $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$; $1A=A$;

(iii) $\lambda A=0$ si et seulement si $\lambda=0$ ou $A=0$;

(iv) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$; $(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}$; $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=A$.

Preuve. Les deux membres de chaque égalité ont le même type ; on compare leurs coefficients d'indices i, j, qui sont égaux par les règles de calcul sur les réels. Par exemple, pour (ii), $\lambda(a_{ij}+b_{ij})=\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}$. Pour (iii) : si $\lambda\neq 0$ et $\lambda A=0$, alors $\lambda a_{ij}=0$, donc $a_{ij}=0$ pour tous i, j ; la réciproque est claire. Pour (iv), le coefficient d'indices i, j de $(A+B)^{\mathrm{T}}$ est $a_{ji}+b_{ji}$, celui de $A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$ aussi ; de même pour les deux autres égalités.

18.2 Produit de Matrices

Le produit de deux matrices se calcule ligne par colonne. Il est associatif, mais pas commutatif, et un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit.

Définition 18.5 (Produit). Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le *produit* AB, noté aussi $A \times B$, est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ telle que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} \qquad (1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq q).$$

Remarque 18.1 (Ligne par Colonne). Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Le coefficient c_{ij} s'obtient en multipliant les coefficients de la ligne i de A par ceux de la colonne j de B, terme à terme, puis en additionnant.

Un Exemple de Produit

Exemple 18.4 (Produit d'une Matrice $(2,3)$ par une Matrice $(3,2)$). Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$. On dispose les calculs ainsi : B en haut à droite, A à gauche, et AB à l'intersection des lignes de A et des colonnes de B.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -9 & 30 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

Par exemple, $c_{11} = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + 5 \times (-2) = -9$ et $c_{12} = 3 \times 0 + (-1) \times 5 + 5 \times 7 = 30$. Ici BA est aussi défini, mais c'est une matrice de type $(3,3)$: $AB \neq BA$.

Règles de Calcul du Produit

Théorème 18.2 (Règles du Produit). Pour toutes les matrices A, B, C dont les types permettent les calculs écrits, et tout réel λ :

(i) $(AB)\,C = A\,(BC)$ (*associativité*) ;

(ii) $A\,(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)\,C = AC + BC$ (*distributivité*) ;

(iii) $\lambda\,(AB) = (\lambda A)\,B = A\,(\lambda B)$;

(iv) si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors $AI_p = I_n A = A$; en particulier $AI = IA = A$ pour A carrée (I est *élément neutre*) ;

(v) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$.

Le point (i) est admis.

Preuve de (ii) à (v). (ii) Le coefficient d'indices i, j de $A(B+C)$ est $\sum_k a_{ik}\,(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_k a_{ik} b_{kj} + \sum_k a_{ik} c_{kj}$; de même pour l'autre égalité. (iii) Les trois coefficients valent $\sum_k \lambda a_{ik} b_{kj}$. (iv) Dans $\sum_k a_{ik}\delta_{kj}$, où δ_{kj} est le coefficient de I_p, seul le terme $k = j$ peut être non nul, et il vaut a_{ij} ; de même pour $I_n A$. (v) Le coefficient d'indices i, j de $(AB)^{\mathrm{T}}$ est celui d'indices j, i de AB, soit $\sum_k a_{jk} b_{ki}$; celui de $B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$ est $\sum_k b_{ki} a_{jk}$: c'est le même.

Ce que le Produit ne Permet Pas

Définition 18.6 (Matrices qui Commutent). Deux matrices carrées A et B de même ordre *commutent* si $AB = BA$.

Exemple 18.5 (Deux Matrices de Carré Nul). Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule

$$NN = N'N' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad NN' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N'N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 18.2 (Trois Pièges). L'Exemple 18.5 montre que :

(i) le produit n'est pas commutatif : $NN' \neq N'N$;

(ii) un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit : $NN = 0$ et $N \neq 0$; on ne peut donc pas simplifier : $NN = N0$, mais $N \neq 0$;

(iii) les identités remarquables des réels sont fausses en général :
$(N + N')(N + N') = NN + NN' + N'N + N'N' = I_2$, alors que $NN + 2NN' + N'N' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18.3 Puissances d'une Matrice Carrée

On multiplie une matrice carrée par elle-même. Les règles des puissances des réels restent vraies ; celles qui portent sur deux matrices, comme la formule du binôme, demandent que ces matrices commutent.

Définition 18.7 (Puissances). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A^0 = I_n$ et, pour tout entier $k \geq 0$, $A^{k+1} = A^k A$. Ainsi $A^1 = A$, $A^2 = AA$, et A^k est le produit de k facteurs égaux à A si $k \geq 1$.

Théorème 18.3 (Règles des Puissances). Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et k, m des entiers naturels.

(i) $A^k A^m = A^{k+m}$ et $\left(A^k\right)^m = A^{km}$.

(ii) Si A et B commutent, alors $A^k B = BA^k$ et $(AB)^k = A^k B^k$.

(iii) Si A et B commutent, alors (*formule du binôme*)

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^j B^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^{m-j} B^j.$$

La seconde écriture s'obtient en remplaçant j par $m-j$ dans la première, car $\binom{m}{m-j} = \binom{m}{j}$ (Théorème 17.7 (ii) du cours 17 [3]).

Preuve du Théorème 18.3

Preuve. Toutes les récurrences sont faites par le Théorème 1.13 du cours 1 [1]. (i) À k fixé, par récurrence sur m : pour $m = 0$, $A^k I = A^k$; et $A^k A^{m+1} = A^k \left(A^m A\right) = \left(A^k A^m\right) A = A^{k+m} A = A^{k+m+1}$ (Théorème 18.2 (i)). Puis, par récurrence sur m : $\left(A^k\right)^0 = I = A^0$, et $\left(A^k\right)^{m+1} = \left(A^k\right)^m A^k = A^{km} A^k = A^{km+k}$.

(ii) Par récurrence sur k : $A^0 B = B = B A^0$; et $A^{k+1} B = A^k \left(AB\right) = A^k \left(BA\right) = \left(A^k B\right) A = \left(BA^k\right) A = BA^{k+1}$. Puis $(AB)^0 = I = A^0 B^0$, et $(AB)^{k+1} = A^k B^k AB = A^k AB^k B = A^{k+1} B^{k+1}$, car $B^k A = AB^k$ (ce qui précède, A et B échangés).

(iii) On reprend la preuve du Théorème 17.8 du cours 17 [3], avec I au lieu de 1 : par (i), $(A+B)^{m+1} = (A+B)(A+B)^m$, et on distribue (Théorème 18.2 (ii) et (iii)). Le seul calcul nouveau est

$$(A+B) A^j B^{m-j} = A^{j+1} B^{m-j} + \left(BA^j\right) B^{m-j} = A^{j+1} B^{m-j} + A^j B^{m+1-j},$$

qui utilise $BA^j = A^j B$ (point (ii)) ; la formule de Pascal conclut comme dans le cours 17 [3].

Théorème 18.4 (Puissances d'une Matrice Diagonale). Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$. Pour tout entier $k \geq 0$, D^k est diagonale, de coefficients diagonaux $d_1^k, \ldots, d_n^k$ (avec la convention $0^0 = 1$).

Preuve. Le produit de deux matrices diagonales $M = (m_{il})$ et $M' = \left(m'_{lj}\right)$ est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $m_{ii}m'_{ii}$: dans $\sum_l m_{il}m'_{lj}$, seul le terme $l = i = j$ peut être non nul. On conclut par récurrence sur k (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) : $D^0 = I_n$ convient, et $D^{k+1} = D^k D$.

Exemple 18.6 (Une Matrice Diagonale). Si $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, alors $D^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \geq 0$.

Une Application du Binôme

Exemple 18.7 (Une Application du Binôme). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = N + I$, avec N de l'Exemple 18.5. I et N commutent (Théorème 18.2 (iv)), et $N^j = 0$ pour $j \geq 2$ ($N^2 = 0$, puis $N^{j+1} = N^j N$). Pour $k \geq 1$, seuls les termes $j = 0$ et $j = 1$ de la formule du binôme restent (Théorème 18.3 (iii)) : $A^k = N^0 I^k + kN^1 I^{k-1} = I + kN$, car $I^j = I$ pour tout j (Théorème 18.2 (iv) et récurrence), soit $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui vaut aussi pour $k = 0$.

18.4 Déterminant et Matrice Inverse

Une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul. On calcule alors son inverse par une formule en ordre 2, en cherchant un produit égal à kI en ordre 3.

Définition 18.8 (Déterminant d'Ordre 2 et 3).

(i) Le *déterminant* de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

(ii) Le déterminant de $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est le réel obtenu en *développant selon la première ligne* :

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

où le déterminant d'ordre 2 qui multiplie a_{1j} est celui de la matrice obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne j de A.

Remarque 18.3 (Autres Développements). On admet qu'on obtient le même nombre en développant selon n'importe quelle ligne ou colonne, le coefficient a_{ij} étant affecté du signe $(-1)^{i+j}$; on choisit la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros. La *règle de Sarrus* donne aussi $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, ce qu'on vérifie en développant (ii).

Un Déterminant d'Ordre 3

Exemple 18.8 (Un Déterminant d'Ordre 3). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En développant selon la première ligne,

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times (-1) + 0 = 3.$$

Déterminant d'un Produit

Théorème 18.5 (Déterminant d'un Produit). Pour A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2,3\}$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et $\det(I_n) = 1$. Pour $n = 3$, l'égalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est admise.

Preuve. Pour $n = 2$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$, et

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh = (ad-bc)(eh-fg). \end{aligned}$$

Enfin $\det(I_2) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$, et $\det(I_3) = 1$ par la Définition 18.8 (ii).

Matrice Inversible

Définition 18.9 (Matrice Inversible). Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Théorème 18.6 (Propriétés de l'Inverse). Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) Si A est inversible, une matrice C telle que $AC = CA = I_n$ est unique : on l'appelle l'*inverse* de A, et on la note A^{-1}.

(ii) Si A est inversible, A^{-1} l'est aussi, et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iii) Si A et B sont inversibles, AB l'est aussi, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Preuve. (i) Si $AC = CA = I$ et $AC' = C'A = I$, alors $C' = C'I = C'(AC) = (C'A)C = IC = C$ (Théorème 18.2 (i) et (iv)). (ii) Les égalités $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ disent que A convient pour A^{-1}. (iii) $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AA^{-1} = I$ (Théorème 18.2 (i) et (iv)), et de même $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I$.

Inverse d'une Matrice d'Ordre 2

Théorème 18.7 (Critère d'Inversibilité, Ordre 2). Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Un calcul donne $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad - bc)\, I_2$. Si $\det(A) \neq 0$, la matrice $\frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$ vérifie la Définition 18.9 (Théorèmes 18.2 (iii) et 18.1 (ii)) : A est inversible, et c'est son inverse (Théorème 18.6 (i)). Réciproquement, si A est inversible, $\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(I_2) = 1$ (Théorème 18.5), donc $\det(A) \neq 0$.

Un Inverse d'Ordre 2

Exemple 18.9 (Un Inverse d'Ordre 2). Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 2 \neq 0$, et

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $AA^{-1} = I_2$.

Théorème 18.8 (Critère d'Inversibilité, Ordre 3). Une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Que A inversible entraîne $\det(A) \neq 0$ se démontre comme dans la preuve du Théorème 18.7, par le Théorème 18.5 ; la réciproque est admise.

Théorème 18.9 (Inverse à Droite). Soient $n \in \{2, 3\}$ et A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = I_n$. Alors A est inversible et $A^{-1} = B$; en particulier, $BA = I_n$.

Preuve. $\det(A)\det(B) = \det(I_n) = 1$ (Théorème 18.5), donc $\det(A) \neq 0$, et A est inversible (Théorèmes 18.7 et 18.8). Alors $B = IB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}$.

Corollaire 18.1 (Méthode du Produit kI). Soient $n \in \{2, 3\}$, A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et k un réel non nul tels que $AB = kI_n$. Alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{k}B$.

Preuve. $A\left(\frac{1}{k}B\right) = \frac{1}{k}(AB) = I_n$ (Théorèmes 18.2 (iii) et 18.1 (ii)), et le Théorème 18.9 conclut.

Exemple 18.10 (Par la Méthode du Produit kI). Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Exemple 18.8) et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : le produit. Ligne par colonne,

$$AB = \begin{pmatrix} 1+2+0 & -2+2+0 & 2-2+0 \\ 0+1-1 & 0+1+2 & 0-1+1 \\ 1+0-1 & -2+0+2 & 2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3.$$

Étape 2 : l'inverse. Par le Corollaire 18.1, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{3}B$. On retrouve $\det(A) = 3 \neq 0$ (Exemple 18.8 et Théorème 18.8).

Comatrice

Remarque 18.4 (Comatrice). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \{2, 3\}$; on convient que le déterminant d'une matrice à un seul coefficient est ce coefficient. On admet que, si $\det(A) \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} (\operatorname{com} A)^{\mathrm{T}}$, où le coefficient d'indices i, j de la *comatrice* $\operatorname{com} A$ est $(-1)^{i+j}$ fois le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. Pour les matrices A et B de l'Exemple 18.10, $(\operatorname{com} A)^{\mathrm{T}} = B$. En ordre 2, on retrouve la formule du Théorème 18.7.

18.5 Systèmes Linéaires

Un système linéaire s'écrit $AX = B$. Si A est inversible, il a une seule solution, $X = A^{-1}B$. Sinon, en ordre 2, il n'en a aucune ou une infinité. La méthode de Gauss résout tous les cas.

Définition 18.10 (Système Linéaire). Un *système linéaire* de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ est un système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des réels. Une *solution* est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de réels qui vérifie les n équations. Avec $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, le système équivaut à l'égalité $AX = B$ (Définition 18.5 et égalité des matrices). Deux systèmes sont *équivalents* s'ils ont les mêmes solutions.

Système de Matrice Inversible

Théorème 18.10 (Système de Matrice Inversible). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système $AX = B$ a une solution et une seule : $X = A^{-1}B$.

Preuve. Si $AX = B$, alors $X = \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B$: c'est la seule solution possible. Réciproquement, $A\left(A^{-1}B\right) = \left(AA^{-1}\right)B = B$.

Exemple 18.11 (Par la Matrice Inverse). Résolvons $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$

Étape 1 : l'écriture matricielle. Le système s'écrit $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Étape 2 : l'inverse. $\det(A) = 2 \times 3 - (-1) \times 1 = 7 \neq 0$, donc $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (Théorème 18.7).

Étape 3 : la solution. Par le Théorème 18.10, la seule solution est

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \times 4 + 1 \times 6 \\ -1 \times 4 + 2 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{7} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix},$$

soit $(x, y) = \left(\frac{18}{7}, \frac{8}{7}\right)$. Vérification : $2 \times \frac{18}{7} - \frac{8}{7} = 4$ et $\frac{18}{7} + 3 \times \frac{8}{7} = 6$.

Théorème 18.11 (Deux Équations, Deux Inconnues). Soit le système $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

(i) Si $\det(A) \neq 0$, le système a une solution et une seule.

(ii) Si $\det(A) = 0$, le système n'a aucune solution, ou il en a une infinité.

Preuve. (i) Théorèmes 18.7 et 18.10. (ii) Supposons que le système ait une solution X_0. On cherche $V \neq 0$ tel que $AV = 0$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, $V = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ convient : $AV = \begin{pmatrix} -ab + ba \\ -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \det(A) \end{pmatrix} = 0$. Sinon, si $(c, d) \neq (0, 0)$, $V = \begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$ convient ; si $A = 0$, tout $V \neq 0$ convient. Alors, pour tout réel t, $A(X_0 + tV) = AX_0 + tAV = B$ (Théorème 18.2 (ii) et (iii)) : les $X_0 + tV$ sont des solutions, deux à deux distinctes car $V \neq 0$ (Théorème 18.1 (iii)).

Remarque 18.5 (Lecture Géométrique). Si $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(c, d) \neq (0, 0)$, chaque équation est celle d'une droite, et $\det(A) = ad - cb$ est le nombre δ du Théorème 14.14 du cours 14 [2] : si $\delta \neq 0$, les droites sont sécantes ; si $\delta = 0$, elles sont parallèles, confondues (une infinité de solutions) ou strictement parallèles (aucune solution).

Théorème 18.12 (Opérations sur les Équations). On obtient un système équivalent si l'on fait l'une des opérations suivantes :

(i) échanger deux équations ;

(ii) multiplier une équation par un réel *non nul* ;

(iii) ajouter à une équation un multiple d'une *autre* équation.

Preuve. Une solution du premier système vérifie les équations du second, qui en sont des combinaisons. Chaque opération se défait par une opération du même type : (i) par le même échange, (ii) en multipliant par l'inverse du réel, (iii) en retranchant le même multiple de la même équation, restée inchangée. Une solution du second système est donc aussi solution du premier.

Remarque 18.6 (La Méthode). La *méthode de Gauss* (ou *du pivot*) applique ces opérations pour éliminer x_1 des équations 2 à n, puis x_2 des équations 3 à n, etc. On obtient un système *triangulaire*, qu'on résout en remontant, de la dernière équation à la première. Si le coefficient attendu (le *pivot*) est nul, on échange deux équations (Théorème 18.12 (i)) ; s'il est nul dans toutes les équations restantes, on passe à l'inconnue suivante. Si une équation devient $0 = c$ avec $c \neq 0$, le système n'a pas de solution ; si elle devient $0 = 0$, on la supprime, et s'il reste moins d'équations que d'inconnues, une inconnue au moins reste libre : le système, s'il a une solution, en a une infinité.

Un Système de Trois Équations

Exemple 18.12 (Par la Méthode de Gauss). Résolvons le système (S) ci-dessous. On note L_1, L_2, L_3 ses équations ; chaque flèche résume des opérations du Théorème 18.12 ; par exemple, $L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$ multiplie L_3 par $3 \neq 0$ (ii), puis lui ajoute L_2 (iii).

$$(S) \begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x+2y-z=2 \end{cases} \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y-z=-9 \\ y-2z=-4 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow 3L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y-z=-9 \\ -7z=-21 \end{cases}$$

En remontant. La dernière équation donne $z = 3$; la deuxième, $-3y = -9 + 3$, soit $y = 2$; la première, $x = 6 - 2 - 3 = 1$. Le système (S) a une seule solution : $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Vérification : $1 + 2 + 3 = 6$, $2 - 2 + 3 = 3$, $1 + 4 - 3 = 2$.

La matrice de (S) a pour déterminant $1 \times (1-2) - 1 \times (-2-1) + 1 \times (4+1) = 7 \neq 0$ (Définition 18.8 (ii)) ; elle est donc inversible (Théorème 18.8) : on pouvait aussi calculer son inverse et appliquer le Théorème 18.10 ; la méthode de Gauss est souvent plus courte.

18.6 Matrices Diagonalisables et Suites

Si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, les puissances de A se calculent par celles de D. On en déduit le terme général d'une suite définie par $U_{k+1} = AU_k$.

Définition 18.11 (Matrice Diagonalisable). Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Théorème 18.13 (Puissances d'une Matrice Diagonalisable). Si $A = PDP^{-1}$, avec P inversible, alors $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout entier $k \geq 0$.

Preuve. Par récurrence sur k (Théorème 1.13 du cours 1 [1]). Pour $k = 0$, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$. Si $A^k = PD^kP^{-1}$, alors

$$A^{k+1} = A^kA = PD^kP^{-1}PDP^{-1} = PD^kIDP^{-1} = PD^{k+1}P^{-1},$$

par l'associativité du produit (Théorème 18.2 (i) et (iv)).

Remarque 18.7 (Trouver P et D). Dans les exercices de cette leçon, P et D sont données : on vérifie que P est inversible, on calcule P^{-1}, puis on vérifie que $PDP^{-1} = A$, ou, ce qui revient au même, que $AP = PD$. Trouver soi-même P et D dépasse le programme.

Un Exemple de Diagonalisation

Exemple 18.13 (Calcul de A^k). Soient $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Étape 1 : P est inversible. $\det(P) = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$, et $P^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (Théorème 18.7).

Étape 2 : $A = PDP^{-1}$. $PD = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, puis $PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2+6 & -3-6 \\ 2+4 & -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = A$.

Étape 3 : les puissances. Par les Théorèmes 18.13 et 18.4, pour tout $k \geq 0$,

$$A^k = P \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -2(-1)^k + 3 \times 2^k & 3(-1)^k - 3 \times 2^k \\ -2(-1)^k + 2 \times 2^k & 3(-1)^k - 2 \times 2^k \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0$, on retrouve I_2 ; pour $k = 1$, on retrouve A.

Théorème 18.14 (Suite $U_{k+1} = AU_k$). Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(U_k)_{k\geq 0}$ une suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $U_{k+1} = AU_k$ pour tout $k \geq 0$. Alors $U_k = A^k U_0$ pour tout $k \geq 0$.

Preuve. Par récurrence sur k (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) : $U_0 = IU_0 = A^0 U_0$; si $U_k = A^k U_0$, alors $U_{k+1} = A\left(A^k U_0\right) = \left(AA^k\right) U_0 = A^{k+1} U_0$, par le Théorème 18.2 (i) et parce que $AA^k = A^1 A^k = A^{k+1}$ (Théorème 18.3 (i)). C'est l'analogue du Théorème 1.4 du cours 1 [1] pour les suites géométriques.

Exemple 18.14 (Deux Suites Liées). Soient (x_k) et (y_k) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et, pour tout $k \geq 0$, $x_{k+1} = 8x_k - 9y_k$, $y_{k+1} = 6x_k - 7y_k$. Avec $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$, on a $U_{k+1} = AU_k$, où A est la matrice de l'Exemple 18.13. Par le Théorème 18.14, $U_k = A^k U_0$ est la première colonne de A^k :

$$x_k = -2\left(-1\right)^k + 3 \times 2^k, \qquad y_k = -2\left(-1\right)^k + 2 \times 2^k.$$

Remarque 18.8 (Application Linéaire du Plan). On fixe un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (cours 14 [2]). Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On dit que f est l'*application linéaire de matrice* A dans ce repère. Si g est celle de matrice B, alors $g \circ f$ est celle de matrice BA, car $B(AX) = (BA)X$ (Théorème 18.2 (i)). Si A est inversible, f est une bijection, et sa réciproque est l'application de matrice A^{-1} (Théorème 18.10).

Exemple 18.15 (Symétrie de Centre O). L'application qui, à tout point $M(x, y)$, associe son symétrique $M'(-x, -y)$ par rapport à l'origine O du repère est l'application linéaire de matrice $-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Comme $(-I_2)(-I_2) = I_2$, elle est sa propre réciproque.

À retenir

On retient les règles du calcul matriciel et leurs pièges, le critère du déterminant, la résolution des systèmes, et le calcul des puissances.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Somme et produit par un réel coefficient par coefficient ; produit ligne par colonne, associatif et distributif, mais non commutatif ; un produit peut être nul sans qu'aucun facteur ne le soit (Théorèmes 18.1, 18.2, Remarque 18.2).
- $A^0 = I$, $A^{k+1} = A^k A$; formule du binôme si $AB = BA$; puissances d'une matrice diagonale (Théorèmes 18.3, 18.4).
- En ordre 2 ou 3 : A inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$; $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; inverse d'ordre 2 par la formule, d'ordre 3 par un produit $AB = kI$ (Théorèmes 18.5 à 18.9, Corollaire 18.1).
- Si A est inversible, $AX = B$ a pour seule solution $X = A^{-1}B$; en ordre 2, si $\det(A) = 0$, aucune solution ou une infinité ; méthode de Gauss (Théorèmes 18.10 à 18.12).
- Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = PD^kP^{-1}$; si $U_{k+1} = AU_k$, alors $U_k = A^kU_0$ (Théorèmes 18.13, 18.14).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.