Cours 19

Logique et Ensembles

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

14 novembre 2026

Plan

Introduction

19.1 Assertions et Connecteurs

19.2 Quantificateurs

19.3 Raisonnements

19.4 Ensembles

19.5 Opérations sur les Ensembles

19.6 Produit Cartésien

19.7 Applications

19.8 Ensembles Finis et Infinis

À retenir

Introduction

Toute démonstration enchaîne des énoncés vrais ou faux, reliés par « et », « ou », « si... alors », « pour tout », « il existe ». Cette leçon fixe le sens de ces mots, les façons de raisonner qui en découlent, et le langage des ensembles qu'emploient toutes les autres leçons.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** le calcul dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ (collège) ; pour la récurrence, le Théorème 1.13 du cours 1 [1].
- **Les objets :** les assertions et les connecteurs logiques, les quantificateurs, les raisonnements ; les ensembles, leurs opérations, le produit cartésien, les applications et les bijections.
- **Ce qu'on saura faire :** écrire la négation d'un énoncé, même quantifié ; choisir un raisonnement (direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas, par contre-exemple) ; calculer avec des ensembles ; reconnaître une bijection et sa réciproque.
- **Et ensuite :** les probabilités (cours 7 [3]), l'arithmétique (cours 16 [4]) et le dénombrement (cours 17 [5]) emploient ce langage.

Les ensembles usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont connus ; la notion d'ensemble est précisée à la section 19.4.

19.1 Assertions et Connecteurs

Une assertion est vraie ou fausse. Avec « non », « et », « ou », « implique » et « équivaut », on en forme de nouvelles, dont la valeur se lit sur une table de vérité.

Définition 19.1 (Assertion, Prédicat). Une *assertion* est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux ; on dit que sa *valeur de vérité* est V (vrai) ou F (faux). Un *prédicat* est un énoncé $P(x)$ qui dépend d'une variable x prise dans un ensemble E, et qui devient une assertion chaque fois que l'on donne à x une valeur de E.

Exemple 19.1 (Pair ou Impair).

(i) « 6 est pair » est une assertion vraie ; « 5 est pair » est une assertion fausse.

(ii) Pour $n \in \mathbb{Z}$, « n est pair » est un prédicat $P(n)$: $P(6)$ est vraie et $P(5)$ est fausse. Tant que n n'a pas de valeur, on ne peut pas dire si $P(n)$ est vraie.

Remarque 19.1 (Écrire, c'est Affirmer). Dans un énoncé ou une preuve, écrire une assertion, c'est affirmer qu'elle est vraie : « on a $x \geq 0$ » signifie « l'assertion $x \geq 0$ est vraie ». Quand on veut parler d'une assertion sans l'affirmer, on dit « soit A une assertion ».

Définition 19.2 (Connecteurs). Soient A et B deux assertions. On définit cinq assertions par leurs valeurs de vérité :

- la *négation* « non A », vraie si A est fausse, fausse si A est vraie ;
- la *conjonction* « A et B », vraie si A et B sont toutes deux vraies, fausse sinon ;
- la *disjonction* « A ou B », vraie si au moins l'une des deux est vraie, fausse si les deux sont fausses (le « ou » est *inclusif*) ;
- l'*implication* « $A \Rightarrow B$ », fausse si A est vraie et B fausse, vraie dans les trois autres cas ;
- l'*équivalence* « $A \Leftrightarrow B$ », vraie si A et B ont la même valeur de vérité, fausse sinon.

Ces valeurs sont résumées dans la *table de vérité* :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Vocabulaire de l'Implication

Remarque 19.2 (Lire une Implication). L'assertion $A \Rightarrow B$ se lit « A implique B » ou « si A, alors B ». On dit aussi :

- A est une *condition suffisante* pour B : pour que B soit vraie, il suffit que A le soit ;
- B est une *condition nécessaire* pour A : pour que A soit vraie, il faut que B le soit.

L'implication $B \Rightarrow A$ est la *réciproque* de $A \Rightarrow B$. L'assertion $A \Leftrightarrow B$ se lit « A équivaut à B », « A si et seulement si B », ou « A est une condition nécessaire et suffisante pour B ». Enfin, si A est fausse, $A \Rightarrow B$ est vraie quelle que soit B (lignes 3 et 4 de la table).

Exemple 19.2 (Une Implication et sa Réciproque). Soit x un réel. L'implication « $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ » est vraie : si $x = 2$, alors $x^2 = 4$, et si $x \neq 2$, elle est vraie car $x = 2$ est fausse. Sa réciproque « $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ » est fausse pour $x = -2$: $(-2)^2 = 4$ et $-2 \neq 2$. Ainsi, $x = 2$ est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que $x^2 = 4$.

Lois Logiques

Théorème 19.1 (Lois Logiques). Soient A, B, C des assertions. Quelles que soient leurs valeurs de vérité :

(i) « A ou (non A) » est vraie, et « A et (non A) » est fausse ;

(ii) non (non A) $\Leftrightarrow A$ (double négation)

(iii) non (A et B) $\Leftrightarrow$ (non A ou non B) et non (A ou B) $\Leftrightarrow$ (non A et non B) (De Morgan)

(iv) (A et (B ou C)) $\Leftrightarrow$ ((A et B) ou (A et C)) et
(A ou (B et C)) $\Leftrightarrow$ ((A ou B) et (A ou C)) (distributivité)

(v) ($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (non A ou B)

(vi) non ($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (A et non B) (négation d'une implication)

(vii) ($A \Rightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (non $B \Rightarrow$ non A) (contraposée)

(viii) ($A \Leftrightarrow B$) $\Leftrightarrow$ (($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow A$)) (double implication)

L'implication non $B \Rightarrow$ non A s'appelle la *contraposée* de $A \Rightarrow B$.

Preuve du Théorème 19.1

Preuve. Chaque équivalence est vraie si ses deux membres ont la même valeur de vérité dans chaque cas (Définition 19.2). (i) et (ii) : A et non A ont des valeurs opposées. (iii) non (A et B) est vraie si et seulement si A et B est fausse, c'est-à-dire si au moins l'une de A, B est fausse, c'est-à-dire si non A ou non B est vraie ; de même pour la seconde loi. (iv) Si A est fausse, les deux membres de la première loi sont faux ; si A est vraie, ils ont la valeur de B ou C. Si A est vraie, les deux membres de la seconde loi sont vrais ; si A est fausse, ils ont la valeur de B et C. (v), (vi), (vii) : on lit la table

A	B	$A \Rightarrow B$	non A ou B	non $B \Rightarrow$ non A	A et non B
V	V	V	V	V	F
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	V	F

où les colonnes 3, 4 et 5 sont égales, et la colonne 6 leur est opposée. (viii) $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$ est fausse si et seulement si l'une des deux implications est fausse, c'est-à-dire si A et B n'ont pas la même valeur de vérité, c'est-à-dire si $A \Leftrightarrow B$ est fausse.

Lire le Théorème 19.1

Lire le théorème. Pour nier « et », on nie chaque terme et on remplace « et » par « ou », et inversement (iii). Une implication n'est fausse que si l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse : sa négation est « A et non B », qui n'est pas une implication (vi). Une implication et sa contraposée disent la même chose (vii) ; une implication et sa réciproque, non (Exemple 19.2).

Exemple 19.3 (Nier une Implication). Soit x un réel.

(i) La négation de « $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ » est « $x > 2$ et $x^2 \leq 4$ » (Théorème 19.1 (vi)).

(ii) La contraposée de « $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$ » est « $x^2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$ » (Théorème 19.1 (vii)).

(iii) La négation de « $x \geq 0$ et $x \leq 1$ » est « $x < 0$ ou $x > 1$ » (Théorème 19.1 (iii)).

19.2 Quantificateurs

« Pour tout » et « il existe » transforment un prédicat en assertion. On apprend à lire un énoncé qui en enchaîne plusieurs, et à le nier.

Quantificateurs

Définition 19.3 (Quantificateurs). Soit $P(x)$ un prédicat, où x est une variable prise dans un ensemble E.

- L'assertion « $\forall x \in E,\ P(x)$ », qui se lit « pour tout x de E, $P(x)$ » ou « quel que soit x de E, $P(x)$ », est vraie si $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de E, et fausse sinon.
- L'assertion « $\exists x \in E,\ P(x)$ », qui se lit « il existe x dans E tel que $P(x)$ », est vraie si $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, et fausse sinon.
- L'assertion « $\exists ! \, x \in E,\ P(x)$ », qui se lit « il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ », est vraie si $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E : il en existe un (*existence*), et deux éléments x, y de E qui vérifient $P(x)$ et $P(y)$ sont égaux (*unicité*).

Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont les *quantificateurs* universel et existentiel.

Remarque 19.3 (Variable Liée, Variable Libre). Dans « $\forall x \in E,\ P(x)$ », la variable x est *liée* (ou muette) : on peut la renommer sans changer le sens. Une variable qui n'est ni liée par un quantificateur ni fixée par une valeur est *libre*. Un énoncé sans variable libre est une assertion ; un énoncé qui a une seule variable libre est un prédicat (Définition 19.1). Ainsi, « pour tout entier n, si n est impair, alors n^2 est impair » est une assertion (elle est vraie : Exemple 19.6), tandis que « n est impair » est un prédicat.

Exemple 19.4 (Ordre des Quantificateurs).

(i) « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ » est vraie : pour chaque x, le réel $y = -x$ convient ; y dépend de x.

(ii) « $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x + y = 0$ » est fausse : un tel y vérifierait $0 + y = 0$ et $1 + y = 0$, donc $y = 0$ et $y = -1$, ce qui est impossible.

Échanger $\forall$ et $\exists$ change donc le sens : dans « $\exists y,\ \forall x$ », le même y doit convenir pour tous les x.

Négation des Quantificateurs

Théorème 19.2 (Négation des Quantificateurs). Soit $P(x)$ un prédicat, où x est une variable prise dans un ensemble E.

(i) $\text{non}\,(\forall x \in E,\ P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \text{non}\ P(x))$.

(ii) $\text{non}\,(\exists x \in E,\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \text{non}\ P(x))$.

Preuve. (i) Par la Définition 19.3, « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse si et seulement s'il est faux que $P(x)$ soit vraie pour chaque élément x de E, c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de E, c'est-à-dire si « $\exists x \in E,\ \text{non}\ P(x)$ » est vraie. (ii) De même, « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est fausse si et seulement si aucun élément x de E ne rend $P(x)$ vraie, c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour chaque x de E.

Lire le théorème. Pour nier un énoncé quantifié, on échange $\forall$ et $\exists$, on garde l'ordre des variables, et l'on remplace le prédicat par sa négation. Dire que $\exists!\, x \in E,\ P(x)$ est fausse, c'est dire qu'aucun x ne vérifie $P(x)$, ou qu'au moins deux le vérifient.

Exemples de Négations

Exemple 19.5 (Nier un Énoncé Quantifié).

(i) La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq x$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < x$ » ; elle est vraie, avec $x = \dfrac{1}{2}$: $\dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2}$. L'assertion de départ est donc fausse.

(ii) Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (Définition 1.3 du cours 1 [1]) si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$. Elle n'est pas majorée si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ U_n > M,$$

par le Théorème 19.2 appliqué deux fois. Par exemple, la suite $U_n = n$ n'est pas majorée : pour tout réel M, il existe un entier $n > M$.

(iii) La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(x > 2 \Rightarrow x^2 > 4\big)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \big(x > 2$ et $x^2 \leq 4\big)$ » (Théorèmes 19.2 et 19.1 (vi)).

19.3 Raisonnements

Les lois logiques fondent les façons de démontrer : directement, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas, par contre-exemple, par double implication.

Théorème 19.3 (Raisonnements). Soient A, B, C des assertions.

(i) *Raisonnement direct.* Si A et $A \Rightarrow B$ sont vraies, alors B est vraie.

(ii) *Contraposée.* Si non $B \Rightarrow$ non A est vraie, alors $A \Rightarrow B$ est vraie.

(iii) *Raisonnement par l'absurde.* Si non $A \Rightarrow B$ est vraie et B est fausse, alors A est vraie.

(iv) *Disjonction des cas.* Si A ou B, $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$ sont vraies, alors C est vraie.

(v) *Double implication.* Si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ sont vraies, alors $A \Leftrightarrow B$ est vraie.

(vi) *Contre-exemple.* Soit $P(x)$ un prédicat, où x est pris dans un ensemble E. S'il existe $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse, alors « $\forall x \in E,\ P(x)$ » est fausse.

Preuve du Théorème 19.3

Preuve. (i) Dans la table de la Définition 19.2, la seule ligne où A et $A \Rightarrow B$ sont vraies est la première, où B est vraie. (ii) Théorème 19.1 (vii). (iii) et (iv) : on lit la table de vérité (Définition 19.2). Pour (iii), dans les lignes où B est fausse, non $A \Rightarrow B$ n'est vraie que si non A est fausse, c'est-à-dire si A est vraie. Pour (iv), dans la table à huit lignes de A, B, C, construite comme celle de la Définition 19.2, et dans les lignes où C est fausse, $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$ ne sont toutes deux vraies que si A et B sont fausses, et alors A ou B est fausse : il n'y a donc aucune ligne où les trois hypothèses sont vraies et C fausse. (v) Théorème 19.1 (viii). (vi) « $\exists x \in E,$ non $P(x)$ » est vraie, d'où le résultat par le Théorème 19.2 (i).

Remarque 19.4 (Démontrer en Pratique).

- *Pour tout.* Pour montrer « $\forall x \in E,\ P(x)$ », on écrit « soit $x \in E$ », sans rien supposer d'autre sur x, et l'on montre $P(x)$.
- *Il existe.* Pour montrer « $\exists x \in E,\ P(x)$ », il suffit de donner un élément x_0 de E et de vérifier $P(x_0)$.
- *Implication.* Pour montrer $A \Rightarrow B$, on suppose A vraie et l'on montre B : si A est fausse, l'implication est vraie de toute façon.
- *Par l'absurde.* On suppose non A, et l'on en déduit une assertion B que l'on sait fausse, souvent de la forme « C et non C » (Théorème 19.1 (i)) : c'est une *contradiction*, et A est vraie (Théorème 19.3 (iii)).
- *Par récurrence.* Pour montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout entier $n \geq 0$, on applique le principe de récurrence (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]).

Exemple 19.6 (Carré d'un Entier Impair). Montrons : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est impair, alors n^2 est impair.

Étape 1 : on fixe n. Soit $n \in \mathbb{Z}$; supposons n impair (Remarque 19.4).

Étape 2 : on calcule. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$: n^2 est impair.

Exemple 19.7 (Entier dont le Carré est Pair). Montrons : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Étape 1 : la contraposée. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Tout entier est pair ou impair, et pas les deux : « non pair » signifie « impair ». La contraposée de l'implication est « si n est impair, alors n^2 est impair ».

Étape 2 : conclusion. Cette contraposée est vraie (Exemple 19.6), donc l'implication l'est aussi (Théorème 19.3 (ii)).

Exemple 19.8 ($\sqrt{2}$ est Irrationnel). Montrons qu'il n'existe pas d'entiers $p, q \geq 1$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Étape 1 : on suppose le contraire. Supposons qu'il en existe. L'ensemble des entiers $q \geq 1$ pour lesquels il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$: il a un plus petit élément q (Propriété 16.1 du cours 16 [4]). Soit $p \geq 1$ tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Étape 2 : p et q sont pairs. On a $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p l'est (Exemple 19.7). Écrivons $p = 2p'$, avec $p' \geq 1$. Alors $4p'^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2p'^2$: q^2 est pair, donc q l'est aussi (Exemple 19.7) : $q = 2q'$, avec $q' \geq 1$.

Raisonnement par l'Absurde (suite)

Étape 3 : la contradiction. Alors $\sqrt{2} = \dfrac{2p'}{2q'} = \dfrac{p'}{q'}$, avec $1 \leq q' < q$: cela contredit le choix de q comme plus petit élément. L'hypothèse de l'étape 1 est donc fausse (Théorème 19.3 (iii), avec le Théorème 19.1 (ii)) : $\sqrt{2}$ n'est pas le quotient de deux entiers naturels non nuls ; si $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, alors p et q sont non nuls et de même signe, car $\sqrt{2} > 0$, et $\sqrt{2} = \dfrac{|p|}{|q|}$: c'est exclu, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Le cours 16 [4] démontre de même, par l'absurde, qu'il y a une infinité de nombres premiers (Théorème 16.14).

Exemple 19.9 (Produit de Deux Entiers Consécutifs). Montrons : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)$ est pair. Soit $n \in \mathbb{Z}$; n est pair ou impair.

- **Cas 1 : n pair.** Alors $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et $n(n+1) = 2k(n+1)$ est pair.
- **Cas 2 : n impair.** Alors $n = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et $n+1 = 2k+2 = 2(k+1)$ est pair, donc $n(n+1)$ l'est aussi.

Dans les deux cas, $n(n+1)$ est pair (Théorème 19.3 (iv)).

Exemple 19.10 (Un Contre-Exemple). Le prédicat « n^2+n+41 est premier » est vrai pour $n = 0, 1, \ldots, 39$, mais l'assertion « pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2+n+41 est premier » est fausse : pour $n = 40$, on trouve $40^2+40+41 = 1681 = 41^2$, qui n'est pas premier (Théorème 19.3 (vi)). Vérifier un énoncé sur des exemples ne le démontre pas ; un seul contre-exemple suffit à le réfuter.

19.4 Ensembles

Un ensemble se décrit par la liste de ses éléments ou par une propriété. On compare deux ensembles par l'inclusion, et l'on montre qu'ils sont égaux par double inclusion.

Ensembles et Éléments

Remarque 19.5 (Une Théorie Naïve). On ne définit pas ce qu'est un ensemble : c'est une collection d'objets, ses *éléments*. On note $a \in E$ pour « a appartient à E » (a est un élément de E), et $a \notin E$ sinon. La théorie des ensembles précise cette notion au niveau universitaire ; on admet ici les définitions qui suivent.

Définition 19.4 (Extension, Compréhension).

- Un ensemble est décrit *en extension* par la liste de ses éléments entre accolades : $\{1, 2, 3\}$. L'ordre et les répétitions ne comptent pas : $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 1, 2, 3\}$.
- Si E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat sur E, l'ensemble des éléments x de E pour lesquels $P(x)$ est vraie est noté $\{x \in E : P(x)\}$: il est décrit *en compréhension*. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ est pair}\}$ est l'ensemble des entiers pairs.
- Un ensemble qui a un seul élément a est un *singleton*, noté $\{a\}$. Un ensemble qui n'a aucun élément est dit *vide* ; il n'y en a qu'un (Théorème 19.4 (iii)), noté $\emptyset$.

Égalité et Inclusion

Définition 19.5 (Égalité, Inclusion). Soient A et B deux ensembles.

- A et B sont *égaux*, noté $A = B$, s'ils ont les mêmes éléments : pour tout objet x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.
- A est *inclus* dans B, noté $A \subset B$, si tout élément de A est un élément de B : pour tout objet x, $x \in A \Rightarrow x \in B$. On dit aussi que A est une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de B. L'inclusion est *large* : $A \subset A$.

Double Inclusion

Théorème 19.4 (Double Inclusion, Ensemble Vide). Soient A et B deux ensembles.

(i) $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

(ii) Un ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

(iii) Il existe un seul ensemble vide.

Preuve. (i) Pour chaque objet x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ équivaut à « $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$ » (Théorème 19.1 (viii)). Cette équivalence est donc vraie pour tout x si et seulement si chacune des deux implications l'est pour tout x (Définition 19.3 : « pour tout x, $P(x)$ et $Q(x)$ » est vraie exactement quand $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies pour tout x), c'est-à-dire si $A \subset B$ et $B \subset A$. (ii) Si V est vide, « $x \in V$ » est fausse pour tout x, donc $x \in V \Rightarrow x \in A$ est vraie (Définition 19.2). (iii) Si V et V' sont vides, $V \subset V'$ et $V' \subset V$ par (ii), donc $V = V'$ par (i).

Ensemble des Parties

Définition 19.6 (Ensemble des Parties). Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$: pour tout ensemble A, $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. Il contient toujours $\emptyset$ (Théorème 19.4 (ii)) et E.

Exemple 19.11 (Parties de $\{1,2\}$). Soit $E = \{1,2\}$. Alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

On a $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$, donc $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$. Il ne faut pas confondre l'élément 1 et la partie $\{1\}$: on écrit $1 \in E$ et $\{1\} \subset E$, mais on n'écrit ni $\{1\} \in E$ ni $1 \subset E$.

Remarque 19.6 (Nombre de Parties). Si E est fini à n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n (Théorème 17.9 du cours 17 [5]) ; ici, $2^2 = 4$.

19.5 Opérations sur les Ensembles

Réunion, intersection, différence et complémentaire traduisent « ou », « et » et « non » : leurs règles de calcul découlent des lois logiques.

Réunion, Intersection, Complémentaire

Définition 19.7 (Opérations). Soient E un ensemble, et A, B deux parties de E.

- La *réunion* de A et B est $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- L'*intersection* de A et B est $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- La *différence* « A privé de B » est $A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- Le *complémentaire* de A dans E est $\bar{A} = E \setminus A = \{x \in E : x \notin A\}$.
- A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$.
- Plus généralement, pour des parties $A_1, \ldots, A_n$ de E, $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ est l'ensemble des $x \in E$ qui appartiennent à au moins un A_i, et $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ celui des $x \in E$ qui appartiennent à tous les A_i.

Exemple 19.12 (Un Calcul). Soient $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Alors $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{1, 2\}$, $\bar{A} = \{5, 6, 7, 8\}$ et $\bar{B} = \{1, 2, 7, 8\}$.

Théorème 19.5 (Lois Ensemblistes). Soient E un ensemble, et A, B, C des parties de E ; les complémentaires sont pris dans E.

(i) $\overline{\overline{A}} = A$.

(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (De Morgan)

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)

(iv) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$; A est la réunion des parties disjointes $A \cap B$ et $A \setminus B$.

Preuve du Théorème 19.5

Preuve. Dans chaque égalité, les deux membres sont des parties de E : il suffit de montrer qu'un élément x de E appartient à l'un si et seulement s'il appartient à l'autre. Soit $x \in E$. (i) $x \in \overline{\overline{A}} \Leftrightarrow \text{non}\,(x \notin A) \Leftrightarrow x \in A$ (Théorème 19.1 (ii)). (ii) $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \text{non}\,(x \in A \text{ ou } x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (Théorème 19.1 (iii)) ; de même pour la seconde égalité. (iii) Même méthode, avec le Théorème 19.1 (iv). (iv) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}$. Ensuite, $x \in A$ équivaut à « $x \in A$ et ($x \in B$ ou $x \notin B$) », car la seconde assertion est vraie (Théorème 19.1 (i)) et qu'une conjonction dont un terme est vrai a la valeur de l'autre terme (Définition 19.2), et donc à « $x \in A \cap B$ ou $x \in A \setminus B$ » (Théorème 19.1 (iv)). Enfin, un élément de $(A \cap B) \cap (A \setminus B)$ vérifierait « $x \in B$ et $x \notin B$ », ce qui est faux (Théorème 19.1 (i)). Dans chaque cas, les deux ensembles ont les mêmes éléments : ils sont égaux (Définition 19.5).

Lire le Théorème 19.5

Lire le théorème. Le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires, et inversement (ii) : c'est la loi de De Morgan du Théorème 19.1 (iii), écrite pour des ensembles. Le point (iv) découpe A en deux morceaux disjoints, selon que les éléments sont dans B ou non.

Exemple 19.13 (De Morgan sur un Exemple). Avec les ensembles de l'Exemple 19.12, $\overline{A \cup B} = \{7, 8\}$ et $\bar{A} \cap \bar{B} = \{5, 6, 7, 8\} \cap \{1, 2, 7, 8\} = \{7, 8\}$; de même, $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Remarque 19.7 (Partition). Des parties de E deux à deux disjointes dont la réunion est E forment une *partition* de E. Par exemple, A et $\bar{A}$ forment une partition de E. Le cours 7 [3] emploie cette notion pour les événements (Définition 7.5).

19.6 Produit Cartésien

Un couple est formé de deux éléments pris dans un ordre donné. Le produit cartésien de deux ensembles est l'ensemble de ces couples.

Définition 19.8 (Couple, Produit Cartésien). Soient E et F deux ensembles.

- Un *couple* (x, y) est formé d'un premier élément x et d'un second élément y ; deux couples sont égaux si leurs composantes le sont dans l'ordre :
  $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \text{ et } y = y')$.
- Le *produit cartésien* de E et F est l'ensemble $E \times F$ des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$.
- Plus généralement, pour $n \geq 2$ ensembles $E_1, \ldots, E_n$, un *n-uplet* $(x_1, \ldots, x_n)$ a n composantes, et deux n-uplets sont égaux si leurs composantes de même rang le sont ; $E_1 \times \cdots \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets tels que $x_i \in E_i$ pour tout i. On note $E^n = E \times \cdots \times E$ (n facteurs), par exemple $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Un Exemple de Produit

Exemple 19.14 (Un Produit). Soient a et b deux objets distincts, qui ne sont pas des nombres, $E = \{a, b\}$ et $F = \{1, 2, 3\}$. Alors

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\},$$

qui a $2 \times 3 = 6$ éléments (Théorème 17.2 du cours 17 [5]). On a $(1, 2) \neq (2, 1)$, alors que $\{1, 2\} = \{2, 1\}$; et $E \times F \neq F \times E$: le couple $(a, 1)$ est dans $E \times F$, pas dans $F \times E$.

19.7 Applications

Une application associe à chaque élément d'un ensemble un élément d'un autre. Quand chaque élément d'arrivée est atteint une et une seule fois, l'application est une bijection, et l'on peut revenir en arrière.

Définition 19.9 (Application, Image, Antécédent). Soient E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F, notée $f : E \to F$, associe à chaque élément x de E un unique élément $f(x)$ de F, appelé *image* de x par f. Si $y \in F$ et $f(x) = y$, on dit que x est un *antécédent* de y. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$. Une fonction numérique est une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 19.10 (Bijection, Réciproque). Une application $f : E \to F$ est une *bijection* de E sur F (on dit aussi qu'elle est *bijective*) si tout élément de F a exactement un antécédent :

$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y.$$

L'application *réciproque* de f, notée $f^{-1} : F \to E$, associe alors à chaque $y \in F$ son unique antécédent.

La Réciproque d'une Bijection

Théorème 19.6 (Réciproque). Soit $f : E \to F$ une bijection.

(i) Pour tous $x \in E$ et $y \in F$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

(ii) Pour tout $x \in E$, $f^{-1}(f(x)) = x$; pour tout $y \in F$, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

(iii) f^{-1} est une bijection de F sur E, et sa réciproque est f.

Preuve. (i) Par la Définition 19.10, $f^{-1}(y)$ est un antécédent de y : si $x = f^{-1}(y)$, alors $f(x) = y$. Réciproquement, si $f(x) = y$, alors x est un antécédent de y, donc c'est l'unique antécédent $f^{-1}(y)$. (ii) On applique (i) au couple $(x, f(x))$, puis au couple $\left(f^{-1}(y), y\right)$. (iii) Soit $x \in E$. Pour $y \in F$, $f^{-1}(y) = x$ équivaut à $y = f(x)$ par (i) : x a exactement un antécédent par f^{-1}, à savoir $f(x)$. Donc f^{-1} est une bijection, et sa réciproque envoie x sur $f(x)$: c'est f.

Exemples de Bijections

Exemple 19.15 (Bijections et Non-Bijections).

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, est une bijection. Pour $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y-3}{2}$: y a exactement un antécédent, et $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$.

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, n'est pas une bijection : -1 n'a pas d'antécédent, et 4 en a deux, 2 et -2.

(iii) $h : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $h(x) = x^2$, est une bijection : pour $y \geq 0$, l'unique $x \geq 0$ tel que $x^2 = y$ est $\sqrt{y}$, et $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

L'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée font partie de l'application : g et h ont la même formule, mais h est bijective et g ne l'est pas.

Remarque 19.8 (Où l'On Retrouve les Bijections). Le cours 6 [2] définit l'exponentielle à partir du logarithme : pour tout réel x, l'équation $\ln(y) = x$ a une unique solution $y > 0$ (Définition 6.1), ce qui dit que ln est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque exp (Théorème 6.1 (iii)). Le cours 17 [5] compte un ensemble en le mettant en bijection avec un ensemble déjà compté (Remarque 17.1).

19.8 Ensembles Finis et Infinis

Les ensembles finis et leurs cardinaux relèvent du dénombrement. On définit ici les ensembles infinis, et l'on montre qu'une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément.

Remarque 19.9 (Cardinaux). Le cours 17 [5] définit les ensembles finis et leur cardinal $\mathrm{Card}(E)$, le nombre de leurs éléments, avec $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$ (Définition 17.1). Pour des parties A et B d'un ensemble fini E :

- $\mathrm{Card}\left(\bar{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$ (Théorème 17.1) ;
- $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$, car B est la réunion des parties disjointes $B \cap A$ et $B \setminus A$ (Théorème 19.5 (iv)), d'où $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(B \setminus A)$ (Propriété 17.1 (ii) et (iii)) ;
- $\mathrm{Card}(E_1 \times \cdots \times E_k) = \mathrm{Card}(E_1) \times \cdots \times \mathrm{Card}(E_k)$ pour des ensembles finis $E_1, \ldots, E_k$, $k \geq 2$ (Théorème 17.2) ;
- $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$ (Théorème 17.9 du cours 17 [5]).

Plus Grand Élément

Définition 19.11 (Ensemble Infini). Un ensemble qui n'est pas fini est dit *infini*.

Théorème 19.7 (Plus Grand Élément). Toute partie finie non vide A de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément : il existe $m \in A$ tel que $x \leq m$ pour tout $x \in A$.

Preuve. Par récurrence sur $n = \mathrm{Card}\,(A) \geq 1$ (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]). Si $n = 1$, $A = \{a\}$ et $m = a$ convient. Supposons le résultat vrai pour les parties à n éléments, et soit A une partie à $n+1$ éléments. Soit $a \in A$; la partie $A' = A \setminus \{a\}$ a $n \geq 1$ éléments (Théorème 17.1 (i) du cours 17 [5]), donc un plus grand élément m'. Le plus grand des deux réels a et m' est un élément de A, supérieur ou égal à a et à tout élément de A', donc à tout élément de A.

Exemple 19.16 ($\mathbb{N}$ est Infini). Supposons $\mathbb{N}$ fini. Comme $0 \in \mathbb{N}$, il est non vide, donc il a un plus grand élément N (Théorème 19.7). Mais $N+1 \in \mathbb{N}$ et $N+1 > N$: c'est une contradiction. Donc $\mathbb{N}$ n'est pas fini (Théorème 19.3 (iii), avec le Théorème 19.1 (ii)) : il est infini. De même, l'ensemble des multiples de 15 dans $\mathbb{N}$ est infini : il contient $0 = 15 \times 0$, donc, s'il était fini, il aurait un plus grand élément $15k$, avec $k \in \mathbb{N}$ (Théorème 19.7), et $15\,(k+1)$ serait un multiple de 15 plus grand.

À retenir

On retient la table de vérité, les lois logiques, la négation des quantificateurs, les raisonnements, et les règles de calcul sur les ensembles.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Une assertion est vraie ou fausse ; un prédicat dépend d'une variable libre (Définition 19.1, Remarque 19.3). Le « ou » est inclusif ; $A \Rightarrow B$ n'est fausse que si A est vraie et B fausse (Définition 19.2).
- non $(A$ et $B) \Leftrightarrow$ (non A ou non $B)$; non $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A$ et non $B)$; une implication équivaut à sa contraposée, pas à sa réciproque (Théorème 19.1, Exemple 19.2).
- Pour nier un énoncé quantifié, on échange $\forall$ et $\exists$ et l'on nie le prédicat ; l'ordre des quantificateurs compte (Théorème 19.2, Exemple 19.4).
- Raisonnements : direct, par contraposée, par l'absurde, par disjonction des cas, par double implication, par contre-exemple (Théorème 19.3) ; par récurrence (cours 1 [1]).
- Deux ensembles sont égaux si et seulement si chacun est inclus dans l'autre (Théorème 19.4) ; $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ (Théorème 19.5).
- $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x'$ et $y = y')$ (Définition 19.8). Une bijection a une réciproque : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ (Théorème 19.6).
- Une partie finie non vide de $\mathbb{R}$ a un plus grand élément ; $\mathbb{N}$ est infini (Théorème 19.7, Exemple 19.16).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 16. Arithmétique, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.