Cours 20

Isométries du Plan

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

15 novembre 2026

Je remercie Nizar et Amine Lahyani, qui m'ont motivé à rédiger ce document. Je remercie également les auteurs du manuel [9], qui en est la principale source.

Plan

Introduction

20.1 Applications du Plan

20.2 Transformations Usuelles

20.3 Isométries

20.4 Composée de Deux Symétries Orthogonales

20.5 Points Invariants et Classification

À retenir

Introduction

Une isométrie est une application du plan qui conserve les distances. Les translations, les rotations et les symétries en sont ; cette leçon montre qu'il n'y en a pas d'autres, à une exception près, la symétrie glissante, et que toutes s'obtiennent en composant au plus trois symétries orthogonales.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les vecteurs, les repères et les droites (cours 14 [3]) ; le produit scalaire et le projeté orthogonal (cours 15 [4]) ; les affixes, les arguments et les angles orientés (cours 12 [2]) ; les applications et les bijections (cours 19 [6]).
- **Les objets :** la composée de deux applications du plan ; les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales, les rotations ; les isométries ; les symétries glissantes.
- **Ce qu'on saura faire :** écrire une transformation usuelle avec les nombres complexes ; montrer qu'une application est une isométrie et en déduire ce qu'elle conserve ; composer deux symétries orthogonales ; reconnaître une isométrie par ses points invariants.
- **Et ensuite :** les déplacements et les antidéplacements (cours 21 [7]), puis les similitudes (cours 22 [8]).

Conventions

- On note $\mathcal{P}$ le plan, muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ des cours 11 [1] et 12 ; les affixes sont prises dans ce repère (Définition 12.4 du cours 12 [2]). Un point M a pour affixe z, un point M' pour affixe z', etc.
- Les mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls se lisent sur les affixes : celles de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [2], qui admet la relation de Chasles des angles orientés). Elles sont égales à 2π près.
- Pour $A \neq B$, la *médiatrice* du segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) qui passe par le milieu de $[AB]$; c'est l'ensemble des points équidistants de A et de B (Théorème 12.8 (ii) du cours 12 [2]).
- L'angle géométrique de deux vecteurs non nuls, à valeurs dans $[0, \pi]$, est celui de la Définition 15.2 du cours 15 [4] ; il est noté avec un chapeau, $\widehat{BAC}$.

20.1 Applications du Plan

Une application du plan associe à tout point un point. On les compose comme des fonctions, et l'on retrouve les bijections du cours 19 [6].

Définition 20.1 (Composée, Identité, Point Invariant, Involution). On appelle *application du plan* une application $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ (Définition 19.9 du cours 19 [6]) ; on note souvent $M' = f(M)$. Soient f et g deux applications du plan.

(i) La *composée* $g \circ f$ (lire « g rond f ») est l'application du plan qui, à tout point M, associe $g(f(M))$: on applique d'abord f, puis g.

(ii) L'*identité* Id est l'application du plan qui, à tout point M, associe M.

(iii) Un point M est *invariant* par f (on dit aussi que f *fixe* M) si $f(M) = M$.

(iv) f est une *involution* si $f \circ f = \mathrm{Id}$.

Remarque 20.1 (L'Ordre Compte). En général, $g \circ f \neq f \circ g$: l'Exemple 20.2 en donne un cas. On dit que f et g *commutent* si $g \circ f = f \circ g$.

Règles de la Composition

Théorème 20.1 (Règles de la Composition). Soient f, g, h des applications du plan.

(i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$; on note cette application $h \circ g \circ f$.

(ii) $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$.

(iii) Si f est une bijection, $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$.

(iv) Si $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$, alors f est une bijection et $f^{-1} = g$. En particulier, une involution est une bijection, égale à sa réciproque.

(v) Si f et g sont des bijections, $g \circ f$ est une bijection, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(vi) Si f est une bijection, $g = f^{-1}$ si et seulement si $f \circ g = \mathrm{Id}$. Si h est une bijection, $h \circ f = h \circ g$ si et seulement si $f = g$.

Règles de la Composition : Preuve

Preuve du Théorème 20.1. (i) Les deux applications envoient tout point M sur $h(g(f(M)))$: elles sont égales (Définition 19.9 du cours 19 [6]). (ii) Même argument. (iii) C'est le Théorème 19.6 (ii) du cours 19 [6]. (iv) Soit N un point. Comme $f(g(N)) = N$, $g(N)$ est un antécédent de N par f ; si $f(M) = N$, alors $M = g(f(M)) = g(N)$. Donc N a exactement un antécédent, $g(N)$: f est une bijection et $f^{-1} = g$ (Définition 19.10 du cours 19 [6]). Pour une involution, on prend $g = f$. (v) Posons $k = f^{-1} \circ g^{-1}$. Par (i), (ii) et (iii), $k \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, et de même $(g \circ f) \circ k = \mathrm{Id}$. On conclut par (iv). (vi) Si $g = f^{-1}$, $f \circ g = \mathrm{Id}$ par (iii). Si $f \circ g = \mathrm{Id}$, alors $g = \mathrm{Id} \circ g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \mathrm{Id} = f^{-1}$, par (i), (ii) et (iii). Enfin, si $h \circ f = h \circ g$, on compose à gauche par h^{-1} : $f = h^{-1} \circ h \circ f = h^{-1} \circ h \circ g = g$; la réciproque est immédiate.

20.2 Transformations Usuelles

On définit les translations, les symétries centrales, les symétries orthogonales et les rotations, puis on les écrit avec les nombres complexes : leurs composées et leurs réciproques se calculent alors directement.

Définition 20.2 (Translation). Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur. La *translation de vecteur* $\overrightarrow{w}$, notée $t_{\overrightarrow{w}}$, associe à tout point M l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$ (Théorème 14.1 (i) du cours 14 [3]). Par le Théorème 14.3 (i) du cours 14 [3], $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$.

Définition 20.3 (Symétrie Centrale). Soit I un point. La *symétrie de centre* I, notée S_I, associe à tout point M le point M' tel que I soit le milieu de $[MM']$. Par le Théorème 14.3 (iii) du cours 14 [3], c'est le point tel que $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{MI}$: il existe et il est unique (Théorème 14.1 (i)). On a $S_I(I) = I$.

Définition 20.4 (Symétrie Orthogonale). Soit $\mathcal{D}$ une droite. La *symétrie orthogonale d'axe* $\mathcal{D}$, notée $S_{\mathcal{D}}$, associe à tout point M le point M' tel que le projeté orthogonal H de M sur $\mathcal{D}$ soit le milieu de $[MM']$. Comme H existe et est unique (Définition 15.3 et Théorème 15.6 (i) du cours 15 [4]), $M' = S_H(M)$ existe et est unique.

Théorème 20.2 (Symétrie Orthogonale et Médiatrice). Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point.

(i) $S_{\mathcal{D}}(M) = M$ si et seulement si $M \in \mathcal{D}$.

(ii) Si $M \notin \mathcal{D}$, un point M' est égal à $S_{\mathcal{D}}(M)$ si et seulement si $M' \neq M$ et $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[MM']$.

Symétrie Orthogonale et Médiatrice : Preuve

Preuve du Théorème 20.2. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. (i) Si $M \in \mathcal{D}$, alors $H = M$, car M est un point de $\mathcal{D}$ tel que $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0}$ soit orthogonal à $\mathcal{D}$; le milieu de $[MM']$ est alors M, d'où $M' = M$. Réciproquement, si $S_{\mathcal{D}}(M) = M$, le milieu H de $[MM]$ est M, donc $M \in \mathcal{D}$. (ii) Supposons $M \notin \mathcal{D}$, donc $H \neq M$. Si $M' = S_{\mathcal{D}}(M)$, alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH} \neq \overrightarrow{0}$, orthogonal à $\mathcal{D}$ (Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [3]) : $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à (MM') et passe par le milieu H de $[MM']$; c'est donc la médiatrice, seule perpendiculaire à (MM') passant par H. Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[MM']$, le milieu K de $[MM']$ est sur $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$ (Définition 14.12 (i) et Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [3]) : K est le projeté orthogonal de M, donc $K = H$, et $M' = S_{\mathcal{D}}(M)$.

Définition 20.5 (Rotation). Soient Ω un point et θ un réel. La *rotation de centre* Ω *et d'angle* θ, notée $r(\Omega, \theta)$, associe à Ω le point Ω, et à tout point $M \neq \Omega$ le point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \theta \text{ est une mesure de l'angle orienté } \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right).$$

Le Théorème 20.4 (ii) montre que ce point existe et qu'il est unique.

Remarque 20.2 (Les Définitions du Cours 12). Les Définitions 20.2, 20.3, 20.4 et 20.5 sont celles qu'emploient les Théorèmes 12.7 (iv) et 12.18 du cours 12 [2] ; la symétrie par rapport à l'axe réel est la symétrie orthogonale d'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$. L'homothétie est définie au cours 22 [8].

Théorème 20.3 (Affixes, Produit Scalaire et Droites).

(i) Si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ont pour affixes a et b, alors $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w'} = \mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right)$; ils sont orthogonaux si et seulement si $\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) = 0$.

(ii) Toute droite $\mathcal{D}$ a un vecteur directeur d'affixe $e^{\mathrm{i}\alpha}$, avec α réel. Les réels α' tels que $e^{\mathrm{i}\alpha'}$ soit l'affixe d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ sont alors les réels $\alpha + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. (i) Écrivons $a = x + \mathrm{i}y$ et $b = x' + \mathrm{i}y'$: (x, y) et (x', y') sont les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (Définition 12.4 (ii) du cours 12 [2]). On a

$$a\bar{b} = (x + \mathrm{i}y)\left(x' - \mathrm{i}y'\right) = xx' + yy' + \mathrm{i}\left(yx' - xy'\right),$$

donc $\mathrm{Re}\left(a\bar{b}\right) = xx' + yy' = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w'}$ (Théorème 15.2 (i) du cours 15 [4]). On conclut par le Théorème 15.4 du cours 15 [4].

Preuve du Théorème 20.3 (ii). Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Le vecteur $\overrightarrow{w_1} = \frac{1}{\|\overrightarrow{w}\|}\overrightarrow{w}$ dirige aussi $\mathcal{D}$ (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [3]) et il est de norme 1 (Définition 14.2 (ii)) : en l'écrivant $\overrightarrow{OP}$ (Théorème 14.1 (i)), son affixe p vérifie $|p| = OP = 1$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]), donc s'écrit $e^{i\alpha}$ (Théorème 12.9 (ii)). Un vecteur directeur de norme 1 est colinéaire à $\overrightarrow{w_1}$ (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [3]), donc égal à $t\overrightarrow{w_1}$ avec $|t| = 1$: c'est $\overrightarrow{w_1}$ ou $-\overrightarrow{w_1}$, qui dirigent tous deux $\mathcal{D}$ (Définition 14.6 (ii)), d'affixes respectives $e^{i\alpha}$ et $-e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+\pi)}$. Par le Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [2], les réels α' cherchés sont les $\alpha + 2k\pi$ et les $\alpha + \pi + 2k\pi$, c'est-à-dire les $\alpha + k\pi$.

Théorème 20.4 (Écritures Complexes). Soient Ω un point d'affixe ω, $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe c, θ un réel, et $\mathcal{D}$ la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$ (Théorème 20.3 (ii)). Pour deux points M et M' d'affixes z et z' :

(i) $M' = t_{\overrightarrow{w}}(M)$ si et seulement si $z' = z + c$;

(ii) le point $r(\Omega, \theta)(M)$ existe et il est unique ; $M' = r(\Omega, \theta)(M)$ si et seulement si $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$;

(iii) $M' = S_\Omega(M)$ si et seulement si $z' - \omega = -(z - \omega)$; en particulier, $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$;

(iv) $M' = S_{\mathcal{D}}(M)$ si et seulement si $z' - \omega = e^{2i\alpha}\,\overline{z - \omega}$.

Preuve. (i) et (ii) C'est le Théorème 12.18 (i) et (iii) du cours 12 [2] : sa preuve n'utilise que les conditions des Définitions 20.2 et 20.5, et montre qu'elles équivalent à la formule, qui donne un z' et un seul. (iii) Par le Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [2], Ω est le milieu de $[MM']$ si et seulement si $\frac{z+z'}{2} = \omega$, c'est-à-dire $z' - \omega = -(z - \omega)$; comme $-1 = e^{i\pi}$ (Définition 12.5), c'est la formule de (ii) pour $\theta = \pi$.

Preuve du Théorème 20.4 (iv). Posons $Z = e^{-\mathrm{i}\alpha}(z-\omega)$ et écrivons $Z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b réels ; soit $\overrightarrow{w_1}$ le vecteur d'affixe $e^{\mathrm{i}\alpha}$.

Étape 1 : le projeté orthogonal. Soit H le point d'affixe $h = \omega + ae^{\mathrm{i}\alpha}$. On a $\overrightarrow{\Omega H} = a\overrightarrow{w_1}$ (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]), donc $H \in \mathcal{D}$ (Définition 14.6 (i) du cours 14 [3]). Le vecteur $\overrightarrow{HM}$ a pour affixe $z - h = e^{\mathrm{i}\alpha}Z - ae^{\mathrm{i}\alpha} = \mathrm{i}be^{\mathrm{i}\alpha}$, et

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{i}be^{\mathrm{i}\alpha}\,\overline{e^{\mathrm{i}\alpha}}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}b\left|e^{\mathrm{i}\alpha}\right|^2\right) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{i}b) = 0$$

(Théorèmes 12.4 (iii) et 12.9 (i) du cours 12 [2]) : $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w_1}$ (Théorème 20.3 (i)). Donc H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$ (Définition 15.3 du cours 15 [4]).

Écritures Complexes : Preuve de (iv), Fin

Étape 2 : le symétrique. Par la Définition 20.4 et le Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [2], $M' = S_{\mathcal{D}}(M)$ si et seulement si $z' = 2h - z$, et

$$2h - z = 2\omega + 2ae^{\mathrm{i}\alpha} - \omega - e^{\mathrm{i}\alpha}(a + \mathrm{i}b) = \omega + e^{\mathrm{i}\alpha}(a - \mathrm{i}b) = \omega + e^{\mathrm{i}\alpha}\bar{Z}.$$

Enfin $\bar{Z} = \overline{e^{-\mathrm{i}\alpha}}\,\overline{z-\omega} = e^{\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-\omega}$ (Théorèmes 12.4 (i) et 12.13 (ii)), d'où
$z' - \omega = e^{\mathrm{i}\alpha}e^{\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-\omega} = e^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-\omega}$ (Théorème 12.13 (i)).

Théorème 20.5 (Composées et Réciproques). Soient $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{w'}$ deux vecteurs, Ω un point, θ, θ' deux réels et $\mathcal{D}$ une droite.

(i) $t_{\overrightarrow{w'}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}+\overrightarrow{w'}}$; $t_{\overrightarrow{w}}$ est une bijection, de réciproque $t_{-\overrightarrow{w}}$.

(ii) $r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \theta')$; $r(\Omega, 0) = \mathrm{Id}$; $r(\Omega, \theta)$ est une bijection, de réciproque $r(\Omega, -\theta)$; $r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta')$ si et seulement si $\theta = \theta' \ [2\pi]$.

(iii) S_Ω et $S_\mathcal{D}$ sont des involutions : ce sont des bijections, égales à leurs réciproques.

Preuve du Théorème 20.5. On utilise le Théorème 20.4. (i) Si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ont pour affixes c et c', $t_{\overrightarrow{w'}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ envoie z sur $z + (c + c')$, où $c + c'$ est l'affixe de $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]). Avec $\overrightarrow{w'} = -\overrightarrow{w}$, puis en échangeant les rôles, $t_{-\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{-\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$; on conclut par le Théorème 20.1 (iv). (ii) La composée envoie z sur le point d'affixe z'' tel que $z'' - \omega = e^{\mathrm{i}\theta'} e^{\mathrm{i}\theta} (z - \omega) = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} (z - \omega)$ (Théorème 12.13 (i)). Comme $e^{\mathrm{i}0} = 1$, $r(\Omega, 0) = \mathrm{Id}$, et la réciproque s'obtient comme en (i). Si $\theta = \theta' \ [2\pi]$, alors $e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta'}$ et les deux formules coïncident ; réciproquement, pour $z \neq \omega$, $e^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) = e^{\mathrm{i}\theta'}(z - \omega)$ donne $e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta'}$, donc $\theta = \theta' \ [2\pi]$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [2]). (iii) $S_\Omega \circ S_\Omega = r(\Omega, 2\pi) = \mathrm{Id}$ par (ii) ; $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $\omega + e^{2\mathrm{i}\alpha}\, \overline{e^{2\mathrm{i}\alpha}\, \overline{z - \omega}} = \omega + e^{2\mathrm{i}\alpha} e^{-2\mathrm{i}\alpha} (z - \omega) = z$ (Théorèmes 12.4 (i) et 12.13 (ii)). On conclut par le Théorème 20.1 (iv).

Remarque 20.3 (Symétrie de Centre O et Matrices). Pour $\Omega = O$, le Théorème 20.4 (iii) donne $z' = -z$, c'est-à-dire $(x', y') = (-x, -y)$: S_O est l'application linéaire de matrice $-I_2$ de l'Exemple 18.15 du cours 18 [5].

Exemple 20.1 (Reconnaître une Transformation).

(i) $f : z \mapsto z' = \mathrm{i}z + 2$. Cherchons ω tel que $\omega = \mathrm{i}\omega + 2 : \omega(1 - \mathrm{i}) = 2$, donc $\omega = \frac{2}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i}$. Alors $z' - \omega = \mathrm{i}z + 2 - (\mathrm{i}\omega + 2) = \mathrm{i}(z - \omega)$, et $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$: f est la rotation de centre $\Omega(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Théorème 20.4 (ii)).

(ii) $g : z \mapsto z' = 2 - \bar{z}$. Comme $\overline{z - 1} = \bar{z} - 1$, on a $2 - \bar{z} = 1 - \overline{z - 1}$, soit $z' - 1 = e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\overline{z - 1}$, car $e^{\mathrm{i}\pi} = -1$. Par le Théorème 20.4 (iv), avec $\omega = 1$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, g est la symétrie orthogonale d'axe la droite passant par $\Omega'(1, 0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (d'affixe $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$), c'est-à-dire la droite d'équation $x = 1$.

(iii) $h : z \mapsto z' = z - 3 + \mathrm{i}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{w}(-3, 1)$ (Théorème 20.4 (i)).

20.3 Isométries

Une isométrie conserve les distances. On en déduit qu'elle conserve le produit scalaire, les combinaisons linéaires de vecteurs, les milieux, les droites et les angles, qu'elle est bijective, et qu'elle est déterminée par les images de trois points non alignés.

Définition 20.6 (Isométrie). Une *isométrie* est une application du plan f qui conserve les distances : pour tous points M et N, d'images M' et N',

$$M'N' = MN.$$

Théorème 20.6 (Isométries Usuelles). L'identité, les translations, les rotations, les symétries centrales et les symétries orthogonales sont des isométries.

Preuve. Soient M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2, d'images M_1' et M_2' d'affixes z_1' et z_2' ; on a $M_1'M_2' = |z_2' - z_1'|$ et $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]). Par le Théorème 20.4 :

- pour $t_{\vec{w}}$, $z_2' - z_1' = (z_2 + c) - (z_1 + c) = z_2 - z_1$;
- pour $r(\Omega, \theta)$, $z_2' - z_1' = e^{i\theta}(z_2 - z_1)$, de module $|z_2 - z_1|$ (Théorèmes 12.6 (ii) et 12.9 (i)) ; $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$ est un cas particulier ;
- pour $S_\mathcal{D}$, $z_2' - z_1' = e^{2i\alpha}(\overline{z_2 - \omega} - \overline{z_1 - \omega}) = e^{2i\alpha}\,\overline{z_2 - z_1}$ (Théorème 12.4 (i)), de module $|z_2 - z_1|$ (Théorèmes 12.6 (i), (ii) et 12.9 (i)).

Le cas de l'identité est immédiat.

Théorème 20.7 (Isométries et Produit Scalaire). Soit f une application du plan ; on note $A' = f(A)$, etc.

(i) f est une isométrie si et seulement si, pour tous points A, B, C, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

(ii) Si f est une isométrie, pour tous points A, B, C, D, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Preuve. (i) Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (Définition 14.2 (i) et (iii), Théorèmes 14.2 et 14.3 (i) du cours 14 [3]), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$ par le Théorème 15.3 (iv) du cours 15 [4]. Si f est une isométrie, le second membre ne change pas quand on remplace A, B, C par A', B', C'. Réciproquement, si f conserve ces produits scalaires, on prend $C = B$: $A'B'^2 = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$ (Théorème 15.3 (iii)), d'où $A'B' = AB$. (ii) Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (Théorème 15.3 (ii) du cours 15 [4]), et de même pour les images ; on applique (i) aux deux termes.

Une isométrie transporte toute relation linéaire entre vecteurs ; les propriétés qui suivent en découlent.

Théorème 20.8 (Combinaisons Linéaires). Soient f une isométrie, A, B, C, D, E, F des points et x, y des réels. Si $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{EF}$, alors

$$\overrightarrow{C'D'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{E'F'}.$$

Preuve. Posons $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{CD} - x\overrightarrow{AB} - y\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{C'D'} - x\overrightarrow{A'B'} - y\overrightarrow{E'F'}$. En développant par le Théorème 15.3 du cours 15 [4],

$$\left\|\overrightarrow{V'}\right\|^2 = C'D'^2 + x^2A'B'^2 + y^2E'F'^2 - 2x\,\overrightarrow{C'D'}\cdot\overrightarrow{A'B'} - 2y\,\overrightarrow{C'D'}\cdot\overrightarrow{E'F'} + 2xy\,\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{E'F'}.$$

Par le Théorème 20.7 (ii), chaque terme est égal au terme correspondant du développement de $\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$. Donc $\left\|\overrightarrow{V'}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{V}\right\|^2 = 0$, et $\overrightarrow{V'} = \overrightarrow{0}$ (Théorème 15.3 (iii)).

Corollaire 20.1 (Configurations). Soit f une isométrie ; on note $A' = f(A)$, etc.

(i) Si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$.

(ii) A, B, C sont alignés si et seulement si A', B', C' sont alignés.

(iii) Si $A \neq B$, l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$: tout point de $(A'B')$ est l'image d'un point de (AB), et l'image d'un point de (AB) est sur $(A'B')$.

(iv) Les images de deux droites parallèles (resp. perpendiculaires) sont parallèles (resp. perpendiculaires).

(v) Si $B \neq A$ et $C \neq A$, alors $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

(vi) Si $ABCD$ est un parallélogramme, $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

(vii) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, de même longueur.

Preuve. On applique le Théorème 20.8. (i) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donne $\overrightarrow{A'I'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$ (Théorème 14.3 (iii) du cours 14 [3]). (vi) De même avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (Théorème 14.3 (iv)).

Preuve du Corollaire 20.1 (suite). (iii) Comme $A'B' = AB > 0$, $A' \neq B'$. Si $M \in (AB)$, $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{A'M'} = t\overrightarrow{A'B'}$ et $M' \in (A'B')$ (Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [3]). Si $N' \in (A'B')$, $\overrightarrow{A'N'} = t\overrightarrow{A'B'}$; le point N tel que $\overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{AB}$ (Théorème 14.1 (i)) est sur (AB), et $\overrightarrow{A'f(N)} = t\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'N'}$, donc $f(N) = N'$. (vii) On appelle segment $[AB]$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ avec $0 \leq t \leq 1$. Si $A = B$, c'est $\{A\}$, d'image $\{A'\} = [A'B']$, car $A'B' = AB = 0$ donne $A' = B'$. Sinon, la preuve de (iii), avec $t \in [0, 1]$, donne (vii) ; et $A'B' = AB$.

(ii) Si $A = B$, alors $A'B' = AB = 0$, donc $A' = B'$, et les deux assertions sont vraies. Sinon, $A' \neq B'$, et si A, B, C sont alignés, $C \in (AB)$, donc $C' \in (A'B')$ par (iii). Réciproquement, si $C' \in (A'B')$, (iii) donne un point $N \in (AB)$ tel que $f(N) = C' = f(C)$; alors $NC = f(N)f(C) = 0$, donc $C = N \in (AB)$.

Isométries et Configurations : Fin de la Preuve

(iv) Par (iii), les images des droites (AB) et (CD) sont $(A'B')$ et $(C'D')$. Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ pour un réel k (Définition 14.6 (iii) et Théorème 14.4 du cours 14 [3]) ; le Théorème 20.8 donne $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ (Définition 14.12 (i) du cours 14 [3] et Théorème 15.4 du cours 15 [4]), et ce produit est conservé (Théorème 20.7 (ii)).

(v) Par le Théorème 15.5 du cours 15 [4], $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$, et ce quotient est conservé (Théorème 20.7 (i)). Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11 [1]), deux angles de $[0, \pi]$ de même cosinus sont égaux.

Théorème 20.9 (Bijectivité). Soient f et g des isométries.

(i) Si $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé, $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ en est un, et l'image d'un point de coordonnées (x, y) dans le premier a pour coordonnées (x, y) dans le second.

(ii) f est une bijection, et f^{-1} est une isométrie. Une isométrie est donc une *transformation* au sens de la Définition 12.7 du cours 12 [2].

(iii) $g \circ f$ est une isométrie.

(iv) L'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' et de rayon R.

Preuve. (i) $A'B' = AB = 1$, $A'C' = AC = 1$ et $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ (Théorème 20.7). Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : si $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$, alors $0 = k\, A'B'^2 = k$ (Théorème 15.3 du cours 15 [4]), et $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{0}$, ce qui contredit $A'C' = 1$. Ils forment donc une base orthonormée (Définitions 14.8 et 14.12 (iii) du cours 14 [3], Théorème 15.4). Si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, le Théorème 20.8 donne $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$.

Bijectivité : Preuve

Preuve du Théorème 20.9 (suite). (ii) *Injectivité.* Si $M \neq N$, alors $M'N' = MN > 0$, donc $M' \neq N'$. *Surjectivité.* Soient A un point, $B = t_{\vec{u}}(A)$, de sorte que $AB = 1$, et C un point tel que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ soit un repère orthonormé (Théorème 15.1 (i) du cours 15 [4], Théorème 14.1 (i)). Soit N' un point, de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$, et soit N le point de coordonnées (x, y) dans $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ (Corollaire 14.1). Par (i), $f(N)$ et N' ont les mêmes coordonnées dans le même repère : $f(N) = N'$. Tout point a donc exactement un antécédent : f est une bijection (Définition 19.10 du cours 19 [6]). Pour tous points M', N', on pose $M = f^{-1}(M')$ et $N = f^{-1}(N')$: $MN = f(M) f(N) = M'N'$ (Théorème 19.6 (ii) du cours 19 [6]), et f^{-1} est une isométrie.

(iii) $g(f(M)) g(f(N)) = f(M) f(N) = MN$.

(iv) Si $IM = R$, alors $I'M' = R$. Réciproquement, si $I'N' = R$, le point $N = f^{-1}(N')$ vérifie $IN = f^{-1}(I') f^{-1}(N') = I'N' = R$, par (ii), et $f(N) = N'$.

Caractérisation par Trois Points

Théorème 20.10 (Caractérisation). Soient A, B, C trois points non alignés.

(i) Deux isométries f et g telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$ sont égales.

(ii) Une isométrie qui fixe A, B et C est l'identité.

Preuve. (i) Comme A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 14.6 du cours 14 [3]) : ils forment une base (Définition 14.8). Soit M un point ; il existe des réels x, y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (Théorème 14.9 (i) du cours 14 [3]). Par le Théorème 20.8, appliqué à f et à g,

$$\overrightarrow{f(A)\,f(M)} = x\overrightarrow{f(A)\,f(B)} + y\overrightarrow{f(A)\,f(C)} = x\overrightarrow{g(A)\,g(B)} + y\overrightarrow{g(A)\,g(C)} = \overrightarrow{g(A)\,g(M)}.$$

Comme $f(A) = g(A)$, on obtient $f(M) = g(M)$ (Théorème 14.1 (i)). (ii) On applique (i) avec $g = \mathrm{Id}$, qui est une isométrie (Théorème 20.6).

Deux Composées qui ne Commutent pas

Exemple 20.2 (Deux Composées qui ne Commutent pas). Soient Ω un point d'affixe ω et $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ d'affixe c. Par le Théorème 20.4, $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\Omega$ envoie z sur $2\omega + c - z = 2j - z$, avec $j = \omega + \frac{c}{2}$: c'est S_J, où $J = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\Omega)$. De même, $S_\Omega \circ t_{\overrightarrow{w}}$ envoie z sur $2\omega - (z + c) = 2j' - z$, avec $j' = \omega - \frac{c}{2}$: c'est $S_{J'}$, où $J' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\Omega)$. Comme $c \neq 0$, $J \neq J'$, et $S_J(J) = J \neq S_{J'}(J)$ (Définition 20.3) : $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\Omega \neq S_\Omega \circ t_{\overrightarrow{w}}$.

20.4 Composée de Deux Symétries Orthogonales

Deux symétries orthogonales d'axes sécants se composent en une rotation, d'angle double de celui des axes ; d'axes parallèles, en une translation. Réciproquement, toute rotation et toute translation s'obtiennent ainsi.

Théorème 20.11 (Double d'un Angle de Droites). Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, de vecteurs directeurs d'affixes $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ (Théorème 20.3 (ii)). Pour tous vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{w'}$ de $\mathcal{D}'$, et toute mesure θ de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$, on a $2\theta = 2(\beta - \alpha)\ [2\pi]$. Ainsi 2θ ne dépend que des droites.

Preuve. Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [3]) : $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ ont pour affixes $\lambda e^{i\alpha}$ et $\mu e^{i\beta}$, avec λ, μ réels non nuls (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]). Écrivons-les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (Théorème 14.1 (i)) : les mesures de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ sont les arguments de $\dfrac{\mu e^{i\beta}}{\lambda e^{i\alpha}} = \dfrac{\mu}{\lambda} e^{i(\beta-\alpha)}$ (Théorèmes 12.15 et 12.13 (ii) du cours 12 [2]). Le réel non nul $\frac{\mu}{\lambda}$ a des arguments de la forme $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Théorème 12.14 (iv)) ; comme $\beta - \alpha$ est un argument de $e^{i(\beta-\alpha)}$ (Théorème 12.10 (ii)), le Théorème 12.14 (i) donne $\theta = \beta - \alpha + k\pi\ [2\pi]$ pour un entier k, d'où $2\theta = 2(\beta - \alpha) + 2k\pi = 2(\beta - \alpha)\ [2\pi]$.

Théorème 20.12 (Axes Sécants). Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en Ω, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$, et θ une mesure de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$. Alors

$$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r\left(\Omega, 2\theta\right) \quad \text{et} \quad S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = r\left(\Omega, -2\theta\right).$$

Preuve. Soient $e^{\mathrm{i}\alpha}$ et $e^{\mathrm{i}\beta}$ les affixes de vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, qui passent toutes deux par Ω. Par le Théorème 20.4 (iv), $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur le point d'affixe z'' tel que

$$z'' - \omega = e^{2\mathrm{i}\beta}\,\overline{e^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-\omega}} = e^{2\mathrm{i}\beta}e^{-2\mathrm{i}\alpha}\left(z-\omega\right) = e^{2\mathrm{i}(\beta-\alpha)}\left(z-\omega\right)$$

(Théorèmes 12.4 (i) et 12.13 du cours 12 [2]). Par le Théorème 20.11, $2\theta = 2\left(\beta-\alpha\right)\ [2\pi]$, donc $e^{2\mathrm{i}\theta} = e^{2\mathrm{i}(\beta-\alpha)}$ (Théorème 12.9 (iii)), et $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r\left(\Omega, 2\theta\right)$ (Théorème 20.4 (ii)). Les mesures de $\left(\overrightarrow{w'}, \overrightarrow{w}\right)$ sont les opposées de celles de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ (Théorèmes 12.15 et 12.14 (ii) du cours 12 [2]) ; en échangeant les rôles, $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = r\left(\Omega, -2\theta\right)$.

Corollaire 20.2 (Axes Perpendiculaires). Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires en Ω, de vecteurs directeurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$, alors $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = S_{\Omega}$.

Preuve. Deux droites perpendiculaires en Ω sont sécantes en Ω : le Théorème 20.12 s'applique. Soient a et b les affixes de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$, et θ une mesure de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$. Les droites étant perpendiculaires, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ sont orthogonaux (Définition 14.12 (i) du cours 14 [3]), et $a\bar{b}$ est un imaginaire pur (Théorème 20.3 (i)), non nul. Donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\overline{a\bar{b}}}{|a|^2}$ (Théorèmes 12.4 et 12.5 du cours 12 [2]) est aussi un imaginaire pur non nul : ses arguments, qui sont les mesures de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ (Théorème 12.15), sont de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (Théorème 12.14 (iv)). Donc $2\theta = \pi \ [2\pi]$ et $-2\theta = \pi \ [2\pi]$, et l'on conclut par les Théorèmes 20.12, 20.5 (ii) et 20.4 (iii).

Théorème 20.13 (Axes Parallèles). Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles, H un point de $\mathcal{D}$ et H' son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}'$. Alors

$$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{HH'}}.$$

En particulier, si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, alors $H' = H$ et $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$.

Preuve du Théorème 20.13. Les deux droites ont un vecteur directeur commun (Définition 14.6 (ii) et (iii) du cours 14 [3]), que l'on choisit d'affixe $e^{\mathrm{i}\alpha}$ (Théorème 20.3 (ii)) ; soient h et h' les affixes de H et H'. Par le Théorème 20.4 (iv), $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $z' = h + e^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-h}$, et $S_{\mathcal{D}'}$ envoie z' sur

$$z'' = h' + e^{2\mathrm{i}\alpha}\left(\overline{z'} - \overline{h'}\right) = h' + e^{2\mathrm{i}\alpha}\left(\overline{h} + e^{-2\mathrm{i}\alpha}\,(z-h) - \overline{h'}\right) = z + \left(h'-h\right) - e^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{h'-h}$$

(Théorèmes 12.4 (i) et 12.13 du cours 12 [2]). Comme $\overrightarrow{HH'}$ est orthogonal à $\mathcal{D}'$, $\mathrm{Re}\left(\left(h'-h\right)e^{-\mathrm{i}\alpha}\right) = 0$ (Théorème 20.3 (i)) : $h'-h = \mathrm{i}be^{\mathrm{i}\alpha}$ avec b réel. Alors $e^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{h'-h} = e^{2\mathrm{i}\alpha}\,(-\mathrm{i}b)\,e^{-\mathrm{i}\alpha} = -\left(h'-h\right)$, d'où $z'' = z + 2\left(h'-h\right)$: c'est la translation de vecteur $2\overrightarrow{HH'}$ (Théorème 20.4 (i)).

Théorème 20.14 (Rotations et Translations comme Composées).

(i) Soient $r = r(\Omega, \theta)$ et $\mathcal{D}$ une droite passant par Ω, de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$. Soit $\mathcal{D}'$ la droite passant par Ω de vecteur directeur $\overrightarrow{w'}$, où $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$. Alors $r = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$.

(ii) Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur, $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur orthogonal à $\overrightarrow{w}$, et $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D})$. Alors $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(H)$, pour tout $H \in \mathcal{D}$, et $t_{\overrightarrow{w}} = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$.

Preuve du Théorème 20.14. (i) Un tel $\overrightarrow{w'}$ existe : si $\overrightarrow{w}$ a pour affixe $a = |a|\, e^{i\gamma}$ (Théorème 12.10 (i) du cours 12 [2]), le vecteur d'affixe $e^{i\left(\gamma+\frac{\theta}{2}\right)}$ convient, car $\frac{\theta}{2}$ est un argument de $\frac{e^{i(\gamma+\theta/2)}}{|a|e^{i\gamma}} = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{\theta}{2}}$ (Théorèmes 12.15, 12.13 (ii) et 12.10 (ii)). Si $\mathcal{D}' \neq \mathcal{D}$, les deux droites, qui passent par Ω, ne sont pas parallèles (Théorème 14.14 (i) du cours 14 [3]) : elles sont sécantes en Ω, et le Théorème 20.12 donne $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r\left(\Omega, 2 \times \frac{\theta}{2}\right) = r$. Si $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, $\overrightarrow{w'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{w}$: le quotient de leurs affixes est réel, donc $\frac{\theta}{2} = k\pi \ [2\pi]$ (Théorèmes 12.15 et 12.14 (iv) du cours 12 [2]), $\theta = 0 \ [2\pi]$, et $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id} = r$ (Théorèmes 20.13 et 20.5 (ii)).

Rotations et Translations comme Composées : Fin de la Preuve

Preuve du Théorème 20.14 (ii). Soient H, K deux points distincts de $\mathcal{D}$, et $H' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(H)$, $K' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(K)$. Comme $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}$ est une isométrie (Théorème 20.6), le Corollaire 20.1 (iii) montre que $\mathcal{D}'$ est la droite $(H'K')$, et, par la relation de Chasles,
$\overrightarrow{H'K'} = \overrightarrow{H'H} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KK'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{w} + \overrightarrow{HK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{w} = \overrightarrow{HK}$: $\mathcal{D}'$ est la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par H'. Le vecteur $\overrightarrow{HH'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\mathcal{D}'$ (Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [3]) et $H' \in \mathcal{D}'$: H' est le projeté orthogonal de H sur $\mathcal{D}'$ (Définition 15.3 du cours 15 [4]). Le Théorème 20.13 donne $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{HH'}} = t_{\overrightarrow{w}}$.

Remarque 20.4 (L'Ordre des Symétries). Par le Théorème 20.12, si les axes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécants en Ω et si θ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ de leurs vecteurs directeurs, $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ et $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ sont les rotations de centre Ω d'angles -2θ et 2θ : pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, ce sont $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ et $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, qui sont distinctes (Théorème 20.5 (ii)). Dans une composée de symétries, l'ordre compte.

20.5 Points Invariants et Classification

L'ensemble des points invariants d'une isométrie (le plan, une droite, un point ou aucun point) la reconnaît presque : seules la translation de vecteur non nul et la symétrie glissante n'en ont aucun. Il n'y a que cinq sortes d'isométries.

Points Invariants

Théorème 20.15 (Points Invariants et Médiatrice). Soient f une isométrie et A un point non invariant par f, d'image A'. Tout point invariant par f est sur la médiatrice de $[AA']$.
Preuve. Si $f(\Omega) = \Omega$, alors $\Omega A' = f(\Omega) f(A) = \Omega A : \Omega$ est équidistant de A et de $A' \neq A$, donc sur la médiatrice de $[AA']$ (Théorème 12.8 (ii) du cours 12 [2]).

Théorème 20.16 (Points Invariants des Transformations Usuelles).

(i) Tout point est invariant par Id.

(ii) Les points invariants par $S_{\mathcal{D}}$ sont les points de $\mathcal{D}$.

(iii) Si $\theta \neq 0 \ [2\pi]$, le seul point invariant par $r(\Omega, \theta)$ est Ω.

(iv) Si $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, $t_{\overrightarrow{w}}$ n'a aucun point invariant.

Preuve. (i) C'est la Définition 20.1 (ii). (ii) C'est le Théorème 20.2 (i). (iii) Par le Théorème 20.4 (ii), z est l'affixe d'un point invariant si et seulement si $\left(1 - e^{i\theta}\right)(z - \omega) = 0$; or $e^{i\theta} \neq e^{i0} = 1$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [2]), donc $z = \omega$ (Théorème 12.5). (iv) $z = z + c$ impose $c = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Isométries ayant des Points Invariants

Théorème 20.17 (Isométries ayant des Points Invariants). Soit f une isométrie.

(i) f fixe trois points non alignés si et seulement si $f = \mathrm{Id}$.

(ii) Si f fixe deux points distincts A et B, elle fixe tous les points de (AB), et $f = \mathrm{Id}$ ou $f = S_{(AB)}$.

(iii) Si f a un point invariant Ω et un seul, alors $f = r(\Omega, \theta)$, avec $\theta \neq 0 \ [2\pi]$.

Isométries ayant des Points Invariants : Preuve

Preuve du Théorème 20.17 (i) et (ii). (i) C'est le Théorème 20.10 (ii) ; la réciproque est immédiate. (ii) Si $M \in (AB)$, $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{Af(M)} = t\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$ (Théorème 20.8), et $f(M) = M$. Soit C un point hors de (AB) ; il en existe, par exemple tel que $\left(A, \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ soit un repère orthonormé (Théorème 15.1 (i) du cours 15 [4] et Théorème 14.1 (i)) ; $C \notin (AB)$, car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 14.6 du cours 14 [3]). Si $f(C) = C$, $f = \mathrm{Id}$ par (i). Sinon, $C' = f(C) \neq C$, et A et B sont sur la médiatrice de $[CC']$ (Théorème 20.15), qui est donc (AB) (Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [3]) ; par le Théorème 20.2 (ii), $C' = S_{(AB)}(C)$. Les isométries f et $S_{(AB)}$ fixent toutes deux A et B (Théorème 20.2 (i)) et envoient C sur C' ; comme A, B, C ne sont pas alignés, elles sont égales (Théorème 20.10 (i)).

Isométries ayant un Seul Point Invariant : Preuve

Preuve du Théorème 20.17 (iii). Soit $A \neq \Omega$; comme Ω est le seul point invariant, $A' = f(A) \neq A$. Soit $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AA']$: $\Omega \in \mathcal{D}$ (Théorème 20.15), et $A' \notin \mathcal{D}$, car $A'A \neq A'A'$.

Étape 1 : une isométrie qui fixe Ω et A. Soit $g = S_{\mathcal{D}} \circ f$, isométrie par les Théorèmes 20.6 et 20.9 (iii). On a $g(\Omega) = S_{\mathcal{D}}(\Omega) = \Omega$ (Théorème 20.2 (i)) et $g(A) = S_{\mathcal{D}}(A') = A$, car $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[A'A]$ (Théorème 20.2 (ii)). Par (ii), $g = \mathrm{Id}$ ou $g = S_{\mathcal{D}_1}$, avec $\mathcal{D}_1 = (\Omega A)$.

Étape 2 : f est une composée de deux symétries. Comme $S_{\mathcal{D}}$ est une involution (Théorème 20.5 (iii)), $f = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} \circ f = S_{\mathcal{D}} \circ g$ (Théorème 20.1). Si $g = \mathrm{Id}$, $f = S_{\mathcal{D}}$ fixe tous les points de $\mathcal{D}$ (Théorème 20.16 (ii)), ce qui contredit l'hypothèse. Donc $f = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}_1}$, et $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}_1$, sinon $f = \mathrm{Id}$ (Théorème 20.13).

Étape 3 : conclusion. Les droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}$ passent par Ω : elles ne sont pas parallèles (Théorème 14.14 (i) du cours 14 [3]), donc sécantes en Ω. Par le Théorème 20.12, $f = r(\Omega, 2\theta)$, où θ est une mesure de l'angle de vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}$; et $2\theta \neq 0 \ [2\pi]$ (Théorème 20.5 (ii)), car $f \neq \mathrm{Id}$, puisque f ne fixe que Ω.

Théorème 20.18 (Décomposition). Soient f une isométrie, A un point et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{Af(A)}$. Il existe une isométrie g et une seule qui fixe A et telle que $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ g$: c'est $g = t_{-\overrightarrow{w}} \circ f$. De plus, si $f = t_{\overrightarrow{w'}} \circ g'$, où g' est une isométrie qui fixe A, alors $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{w}$ et $g' = g$.

Preuve. $g = t_{-\overrightarrow{w}} \circ f$ est une isométrie (Théorèmes 20.6 et 20.9 (iii)), et $g(A) = t_{-\overrightarrow{w}}(f(A)) = A$. Par les Théorèmes 20.1 et 20.5 (i), $t_{\overrightarrow{w}} \circ g = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{-\overrightarrow{w}} \circ f = f$. Si $f = t_{\overrightarrow{w'}} \circ g'$ avec $g'(A) = A$, alors $f(A) = t_{\overrightarrow{w'}}(A)$, donc $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{w}$, et $g' = t_{-\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ g' = t_{-\overrightarrow{w}} \circ f = g$.

Définition 20.7 (Symétrie Glissante). Une *symétrie glissante* est une composée $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ est une droite et $\overrightarrow{w}$ un vecteur *non nul* colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$. On dit que $\mathcal{D}$ est son *axe* et $\overrightarrow{w}$ son *vecteur* ; le Théorème 20.20 (iii) montre qu'ils sont uniques.

Théorème 20.19 (Translation et Symétrie Orthogonale). Soient $\mathcal{D}$ une droite, $\overrightarrow{w}$ un vecteur et $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$.

(i) Si $\overrightarrow{w}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, alors $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$.

(ii) Si $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, alors $f = S_{\mathcal{D}'}$, avec $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D})$.

(iii) En général, $\overrightarrow{w}$ s'écrit $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$, avec $\overrightarrow{w_1}$ colinéaire et $\overrightarrow{w_2}$ orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, et, pour toute telle écriture, $f = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, avec $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w_2}}(\mathcal{D})$: f est la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{D}'}$ si $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{0}$, et la symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}'$ et de vecteur $\overrightarrow{w_1}$ sinon.

Preuve du Théorème 20.19. (i) Soient $\Omega \in \mathcal{D}$ d'affixe ω, $e^{i\alpha}$ l'affixe d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $c = \lambda e^{i\alpha}$, avec λ réel, celle de $\overrightarrow{w}$ (Théorème 14.4 (ii) du cours 14 [3] et Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]). Alors $e^{2i\alpha}\overline{c} = \lambda e^{2i\alpha}e^{-i\alpha} = c$, et, par le Théorème 20.4, $S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ envoie z sur $\omega + e^{2i\alpha}\overline{z + c - \omega} = \omega + e^{2i\alpha}\overline{z - \omega} + c$, image de z par $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$. (ii) Par le Théorème 20.14 (ii), $t_{\overrightarrow{w}} = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, d'où $f = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}'}$ (Théorèmes 20.1 et 20.5 (iii)). (iii) Soient $H \in \mathcal{D}$, $P = t_{\overrightarrow{w}}(H)$ et K le projeté orthogonal de P sur $\mathcal{D}$: $\overrightarrow{HK}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ (Définition 14.6 du cours 14 [3]), $\overrightarrow{KP}$ leur est orthogonal (Définition 15.3 du cours 15 [4]), et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KP}$ (relation de Chasles) : une telle écriture existe. Soit maintenant $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ une telle écriture quelconque. Par les Théorèmes 20.5 (i) et 20.1, puis par (ii) appliqué à $\overrightarrow{w_2}$, $f = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ t_{\overrightarrow{w_2}} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, et $\mathcal{D}'$ est parallèle à $\mathcal{D}$ (Théorème 20.14 (ii)).

Théorème 20.20 (Symétries Glissantes). Soit $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ une symétrie glissante.

(i) f n'a aucun point invariant.

(ii) $f \circ f = t_{2\overrightarrow{w}}$.

(iii) Si $f = t_{\overrightarrow{w'}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ est une autre écriture de f comme symétrie glissante, alors $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{w}$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$.

Preuve du Théorème 20.20. (i) Supposons $f(M) = M$, et soit $M_1 = S_{\mathcal{D}}(M)$: $t_{\overrightarrow{w}}(M_1) = M$, donc $\overrightarrow{MM_1} = -\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, et $M \notin \mathcal{D}$ (Théorème 20.2 (i)). Par le Théorème 20.2 (ii), $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à (MM_1) : $-\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{w}$, qui dirige $\mathcal{D}$. Alors $-\left\|\overrightarrow{w}\right\|^2 = \left(-\overrightarrow{w}\right) \cdot \overrightarrow{w} = 0$ (Théorèmes 15.3 et 15.4 du cours 15 [4]), ce qui contredit $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$.
(ii) Par les Théorèmes 20.19 (i), 20.1, 20.5 (iii) puis 20.5 (i), $f \circ f = t_{\overrightarrow{w}} \circ t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{w}}$.
(iii) Par (ii), $t_{2\overrightarrow{w}} = t_{2\overrightarrow{w'}}$: en un point M, $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{w'}$, donc $\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{w}$. Alors $S_{\mathcal{D}} = t_{-\overrightarrow{w}} \circ f = S_{\mathcal{D}'}$, et ces deux symétries ont pour points invariants $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (Théorème 20.2 (i)) : $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Théorème 20.21 (Isométries sans Point Invariant). Une isométrie f n'a aucun point invariant si et seulement si c'est une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissante.
Preuve. La réciproque est le Théorème 20.16 (iv) et le Théorème 20.20 (i). Supposons que f n'ait aucun point invariant. Soient A un point d'affixe a et $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ g$ la décomposition du Théorème 20.18 : $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, puisque $f(A) \neq A$, et g fixe A. Par le Théorème 20.17, il y a trois cas, selon que g fixe un autre point que A (alors $g = \mathrm{Id}$ ou une symétrie orthogonale, par (ii)) ou A seulement (alors g est une rotation d'angle non nul, par (iii)).

- $g = \mathrm{Id}$: $f = t_{\overrightarrow{w}}$, de vecteur non nul.
- $g = r(A, \theta)$, avec $\theta \neq 0\ [2\pi]$: si $\overrightarrow{w}$ a pour affixe c, f envoie z sur $a + e^{i\theta}(z - a) + c$ (Théorème 20.4), et le point d'affixe $a + \frac{c}{1 - e^{i\theta}}$ est invariant, puisque $e^{i\theta} \neq 1$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [2]) et que $\left(1 - e^{i\theta}\right)(z - a) = c$ caractérise les points invariants. C'est impossible.
- $g = S_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ passe par A : par le Théorème 20.19 (iii), $f = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_{\mathcal{D}'}$. Si $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{0}$, $f = S_{\mathcal{D}'}$ fixe les points de $\mathcal{D}'$ (Théorème 20.16 (ii)), ce qui est impossible ; donc f est une symétrie glissante.

Théorème 20.22 (Classification). Toute isométrie est d'une et d'une seule des cinq sortes suivantes, et s'écrit comme composée d'au plus trois symétries orthogonales :

Isométrie	Points invariants	Composée de symétries orthogonales
Id	$\mathcal{P}$	$S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}},\ \mathcal{D}$ quelconque
$S_{\mathcal{D}}$	$\mathcal{D}$	$S_{\mathcal{D}}$
$r(\Omega, \theta),\ \theta \neq 0\ [2\pi]$	$\{\Omega\}$	$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, axes sécants en Ω (Théorème 20.14 (i))
$t_{\overrightarrow{w}},\ \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$	$\emptyset$	$S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, axes parallèles distincts (Théorème 20.14 (ii))
$t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ (glissante)	$\emptyset$	$S_{\mathcal{D}''} \circ S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}},\ \mathcal{D}' \perp \mathcal{D},\ \mathcal{D}'' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D}')$

Dans la dernière ligne, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont deux droites parallèles distinctes, perpendiculaires à $\mathcal{D}$.

Preuve du Théorème 20.22. *Chaque isométrie est de l'une des sortes.* Si f fixe deux points distincts, c'est Id ou une symétrie orthogonale (Théorème 20.17 (ii)) ; si elle en fixe un seul, c'est une rotation d'angle non nul (Théorème 20.17 (iii)) ; si elle n'en fixe aucun, c'est le Théorème 20.21. *D'une seule.* Une droite a au moins deux points (Théorème 14.1 (i) du cours 14 [3]) et n'est pas le plan entier (Théorème 15.1 (i) du cours 15 [4]) : les ensembles de points invariants (Théorèmes 20.16 et 20.20 (i)) distinguent donc les sortes, sauf une translation de vecteur non nul et une symétrie glissante, qui n'en ont aucun. Si $t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w'}} \circ S_{\mathcal{D}}$, alors $S_{\mathcal{D}} = t_{-\overrightarrow{w'}} \circ t_{\overrightarrow{w}} = t_{\overrightarrow{w}-\overrightarrow{w'}}$ (Théorèmes 20.1 et 20.5 (i)) ; comme $S_{\mathcal{D}}$ a des points invariants, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'}$ (Théorème 20.16 (iv)), et $S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$, ce qui est faux, puisque $S_{\mathcal{D}}$ ne fixe pas les points hors de $\mathcal{D}$ (Théorème 20.2 (i)), et qu'il en existe (Théorème 15.1 (i) du cours 15 [4]).

Classification : Fin de la Preuve

Composées. $\mathrm{Id} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}}$ (Théorème 20.5 (iii)) ; rotations et translations : Théorème 20.14 ; pour une rotation, les deux axes passent par Ω, donc sont sécants en Ω dès qu'ils sont distincts (Théorème 14.14 (i) du cours 14 [3]). Les axes sont distincts : si $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, alors $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = \mathrm{Id}$ (Théorème 20.13), qui n'est ni une rotation d'angle non nul ni une translation de vecteur non nul (Théorème 20.16). Pour une symétrie glissante, soit $\mathcal{D}'$ une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ (il en existe : Théorème 15.1 (i) du cours 15 [4]), donc de vecteur directeur orthogonal à $\overrightarrow{w}$: par le Théorème 20.14 (ii), $t_{\overrightarrow{w}} = S_{\mathcal{D}''} \circ S_{\mathcal{D}'}$, d'où $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}''} \circ S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ (Théorème 20.1 (i)) ; $\mathcal{D}''$ est parallèle à $\mathcal{D}'$ (Théorème 20.14 (ii)) et distincte de $\mathcal{D}'$, comme pour les translations, car $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$.

Exemple 20.3 (Reconnaître une Isométrie).

(i) $f : (x, y) \mapsto (1 - y, 1 + x)$. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, f s'écrit $z' = \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$. Les points invariants vérifient $z(1 - \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$, soit $z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i} : \Omega(0, 1)$ est le seul. Comme $z' - \mathrm{i} = \mathrm{i}(z - \mathrm{i})$, $f = r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) $g : z \mapsto z' = \bar{z} + 3$. L'axe réel $\mathcal{D}$ passe par O et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, d'affixe $1 = e^{\mathrm{i}0}$: $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $\bar{z}$ (Théorème 20.4 (iv)), et $g = t_{3\overrightarrow{u}} \circ S_{\mathcal{D}}$, avec $3\overrightarrow{u}$ non nul et colinéaire à $\overrightarrow{u}$: g est la symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $3\overrightarrow{u}$. On vérifie qu'elle n'a pas de point invariant : $z = \bar{z} + 3$ donnerait $2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z) = 3$, ce qui est impossible (Théorème 12.4 (ii) du cours 12 [2]).

À retenir

On retient les écritures complexes, ce que conserve une isométrie, les composées de deux symétries orthogonales, et la classification par les points invariants.

Ce que cette leçon a établi.

- $g \circ f$: d'abord f, puis g ; l'ordre compte (Définition 20.1, Exemple 20.2). Une involution est sa propre réciproque (Théorème 20.1).
- $t_{\overrightarrow{w}} : z' = z + c$; $r(\Omega, \theta) : z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$; $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$; $S_\mathcal{D} : z' - \omega = e^{2i\alpha}\overline{z - \omega}$ (Théorème 20.4).
- Une isométrie conserve le produit scalaire, les combinaisons linéaires de vecteurs, les milieux, l'alignement, les droites, le parallélisme, l'orthogonalité, les angles géométriques et les cercles ; elle est bijective et sa réciproque est une isométrie (Théorèmes 20.7 à 20.9, Corollaire 20.1).
- Deux isométries qui coïncident en trois points non alignés sont égales (Théorème 20.10).
- $S_{\mathcal{D}'} \circ S_\mathcal{D}$ est la rotation $r(\Omega, 2\theta)$ si les axes sont sécants en Ω, et la translation $t_{2\overrightarrow{HH'}}$ s'ils sont parallèles (Théorèmes 20.12 et 20.13).
- Points invariants : le plan pour Id, l'axe pour $S_\mathcal{D}$, le centre pour une rotation d'angle non nul, aucun pour une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissante ; toute isométrie est composée d'au plus trois symétries orthogonales (Théorème 20.22).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[8] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[9] H. Smida, M. Sakrani, T. Charrada, R. Bouida, M. El Arbi, K. Kaâniche Ben Messaoud et N. Mziou.
Mathématiques, 4^e année de l'enseignement secondaire tunisien, tome 2.
Centre National Pédagogique, 2023.