Cours 21

Déplacements et Antidéplacements

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

15 novembre 2026

Je remercie Nizar et Amine Lahyani, qui m'ont motivé à rédiger ce document. Je remercie également les auteurs du manuel [7], qui en est la principale source.

Plan

Introduction

21.1 Déplacements et Antidéplacements

21.2 Classification

21.3 Deux Points et leurs Images

21.4 Angle d'un Déplacement

21.5 Composées de Déplacements

21.6 Écritures Complexes

21.7 Antidéplacements et Forme Réduite

Conclusion

Introduction

Une isométrie conserve les distances ; elle conserve aussi les angles orientés, ou bien les change tous en leurs opposés. Cette leçon sépare ainsi les isométries en déplacements et antidéplacements, puis étudie chaque famille : par deux points et leurs images, par un angle, par une écriture complexe.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les isométries, les transformations usuelles, leurs écritures complexes et leur classification (cours 20 [5]) ; les affixes, les arguments et les angles orientés (cours 12 [3]).
- **Les objets :** les déplacements et les antidéplacements ; l'angle d'un déplacement ; la forme réduite d'une symétrie glissante.
- **Ce qu'on saura faire :** reconnaître un déplacement ou un antidéplacement ; trouver celui qui envoie deux points donnés sur deux points donnés ; composer deux rotations ; lire la nature et les éléments d'une isométrie sur son écriture complexe.
- **Et ensuite :** les similitudes, directes et indirectes, qui prolongent les déplacements et les antidéplacements (cours 22 [6]).

Conventions

- Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ des cours 11 [2] et 12 ; les affixes sont prises dans ce repère (Définition 12.4 du cours 12 [3]). Pour une application du plan f, on note $A' = f(A)$, $M' = f(M)$, etc., et a, a', z, z' leurs affixes.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\dfrac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [3], qui admet la relation de Chasles des angles orientés) ; elles sont égales à 2π près. On note $\theta = \theta' \ [2\pi]$ l'égalité modulo 2π (Définition 12.6).
- Les notations des transformations sont celles du cours 20 [5] : Id, $t_{\overrightarrow{w}}$, S_I, $S_{\mathcal{D}}$, $r(\Omega, \theta)$ (Définitions 20.1 à 20.5), et $g \circ f$: d'abord f, puis g.

Ce que l'on reprend du cours 20

- **Écritures complexes** (Théorème 20.4 du cours 20 [5]) : $t_{\vec{w}} : z' = z + c$; $r(\Omega, \theta) : z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$; $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$; $S_{\mathcal{D}} : z' - \omega = e^{2i\alpha}\,\overline{z - \omega}$, si $\mathcal{D}$ passe par Ω et a un vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.
- **Composées et réciproques** (Théorèmes 20.1, 20.5, 20.9) : $t_{\vec{w'}} \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{w}+\vec{w'}} = t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{w'}}$ (en échangeant les rôles) ; $r(\Omega, \theta') \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta + \theta')$; une isométrie est bijective, sa réciproque et la composée de deux isométries sont des isométries.
- **Deux symétries orthogonales** (Théorèmes 20.12 à 20.14) : axes sécants en Ω, $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r(\Omega, 2\theta)$ (θ : mesure de $\left(\vec{w}, \vec{w'}\right)$, où $\vec{w}$ dirige $\mathcal{D}$ et $\vec{w'}$ dirige $\mathcal{D}'$) ; axes parallèles, une translation ; réciproquement, toute rotation et toute translation s'écrivent ainsi.
- **Points invariants** (Théorèmes 20.16 et 20.17) : une isométrie qui fixe deux points distincts A et B est Id ou $S_{(AB)}$.
- **Symétries glissantes** (Définition 20.7, Théorèmes 20.19 et 20.20) : $f = t_{\vec{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$ colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$; alors $t_{\vec{w}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\vec{w}}$, f n'a aucun point invariant, $f \circ f = t_{2\vec{w}}$, et $\mathcal{D}$ et $\vec{w}$ sont uniques.
- **Classification** (Théorème 20.22) : toute isométrie est l'identité, une symétrie orthogonale, une rotation d'angle $\theta \neq 0$ $[2\pi]$, une translation de vecteur non nul ou une symétrie glissante, et s'écrit comme composée d'au plus trois symétries orthogonales.

21.1 Déplacements et Antidéplacements

Une isométrie qui conserve tous les angles orientés est un déplacement ; une isométrie qui les change tous en leurs opposés est un antidéplacement. Les translations et les rotations sont des déplacements, les symétries orthogonales des antidéplacements.

Déplacement et Antidéplacement

Définition 21.1 (Déplacement, Antidéplacement). Soit f une isométrie. Si $A \neq B$, alors $A'B' = AB \neq 0$, donc $A' \neq B'$: l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ est défini dès que $A \neq B$ et $C \neq D$.

(i) f est un *déplacement* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les angles orientés $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures. On dit que f *conserve les angles orientés*.

(ii) f est un *antidéplacement* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ sont les opposées de celles de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$. On dit que f *change les angles orientés en leurs opposés*.

Remarque 21.1 (Ce qui est Conservé). Une isométrie conserve toujours les angles géométriques (Corollaire 20.1 (v) du cours 20 [5]) ; les angles orientés, eux, sont conservés par un déplacement et changés en leurs opposés par un antidéplacement. Le Théorème 21.4 montre que toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement, et pas les deux.

Théorème 21.1 (Angles et Affixes). Soient f une isométrie, A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, et

$$q = \frac{d-c}{b-a}, \qquad q' = \frac{d'-c'}{b'-a'}.$$

(i) $|q'| = |q|$.

(ii) Les angles $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures si et seulement si $q' = q$.

(iii) Les mesures de $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ sont les opposées de celles de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ si et seulement si $q' = \bar{q}$.

Ainsi f est un déplacement si et seulement si $q' = q$ pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$, et un antidéplacement si et seulement si $q' = \bar{q}$ pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$.

Preuve du Théorème 21.1. (i) Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [3], $|d-c| = CD$, etc. ; comme f conserve les distances, le Théorème 12.6 (iii) donne $|q'| = \frac{C'D'}{A'B'} = \frac{CD}{AB} = |q|$. On a $q \neq 0$, car $d - c \neq 0$.

(ii) Par le Théorème 12.15 du cours 12 [3], les mesures des deux angles sont les arguments de q' et de q. Si $q' = q$, ce sont les mêmes. Réciproquement, $q' \neq 0$ par (i) ; si θ est un argument commun, $q = |q|\, e^{\mathrm{i}\theta}$ et $q' = |q'|\, e^{\mathrm{i}\theta}$ (Théorème 12.10 (i)), et ces deux nombres sont égaux par (i).

(iii) Par le Théorème 12.14 (iii), les arguments de $\bar{q}$ sont les opposés de ceux de q : si θ est un argument de q, $-\theta$ en est un de $\bar{q}$, et si θ' est un argument de $\bar{q}$, $-\theta'$ en est un de $\bar{\bar{q}} = q$ (Théorème 12.4 (i)). La condition dit donc que q' et $\bar{q}$ ont les mêmes arguments. Comme $|\bar{q}| = |q| = |q'|$ (Théorème 12.6 (i)), on conclut comme en (ii).

Théorème 21.2 (Transformations Usuelles). Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur, Ω un point, θ un réel et $\mathcal{D}$ une droite.

(i) Id, la translation $t_{\overrightarrow{w}}$, la rotation $r(\Omega, \theta)$ et la symétrie centrale S_Ω sont des déplacements.

(ii) La symétrie orthogonale $S_\mathcal{D}$ est un antidéplacement.

Preuve du Théorème 21.2. Ce sont des isométries (Théorème 20.6 du cours 20 [5]). On reprend les notations du Théorème 21.1 et l'on utilise le Théorème 20.4.

- Pour $t_{\overrightarrow{w}}$, si γ est l'affixe de $\overrightarrow{w}$: $d' - c' = (d + \gamma) - (c + \gamma) = d - c$, et de même $b' - a' = b - a$: $q' = q$. Comme $\mathrm{Id} = t_{\overrightarrow{0}}$ (Définition 20.2), le cas de l'identité est compris.
- Pour $r(\Omega, \theta)$: $d' - c' = e^{i\theta}(d - \omega) - e^{i\theta}(c - \omega) = e^{i\theta}(d - c)$, et de même pour $b' - a'$; on simplifie par $e^{i\theta} \neq 0$: $q' = q$. Comme $S_\Omega = r(\Omega, \pi)$, le cas de S_Ω est compris.
- Pour $S_{\mathcal{D}}$: soient ω_0 l'affixe d'un point de $\mathcal{D}$ et $e^{i\alpha}$ celle d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (Théorème 20.3 (ii)) ; alors $d' - c' = e^{2i\alpha}\left(\overline{d - \omega_0} - \overline{c - \omega_0}\right) = e^{2i\alpha}\,\overline{d - c}$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [3]), et de même pour $b' - a'$; on simplifie par $e^{2i\alpha}$: $q' = \dfrac{\overline{d - c}}{\overline{b - a}} = \bar{q}$ (Théorème 12.6 (iii)).

On conclut par le Théorème 21.1.

Théorème 21.3 (Composée et Réciproque). Soient f et g deux isométries, chacune déplacement ou antidéplacement.

(i) Si f et g sont deux déplacements, ou deux antidéplacements, $g \circ f$ est un déplacement.

(ii) Si l'une est un déplacement et l'autre un antidéplacement, $g \circ f$ est un antidéplacement.

(iii) La réciproque f^{-1} d'un déplacement est un déplacement ; celle d'un antidéplacement est un antidéplacement.

Preuve. $g \circ f$ et f^{-1} sont des isométries (Théorème 20.9 du cours 20 [5]). Soient $A \neq B$ et $C \neq D$, q comme au Théorème 21.1, q' le quotient formé avec les images par f, et q'' celui formé avec les images de A', B', C', D' par g, c'est-à-dire avec les images de A, B, C, D par $g \circ f$. Par le Théorème 21.1, q' vaut q ou $\bar{q}$, et q'' vaut q' ou $\overline{q'}$, selon que f et g sont des déplacements ou des antidéplacements. Comme $\bar{\bar{q}} = q$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [3]), $q'' = q$ dans le cas (i) et $q'' = \bar{q}$ dans le cas (ii), pour tous $A \neq B$ et $C \neq D$; on conclut par le Théorème 21.1.

Preuve du Théorème 21.3 (iii). Soient $A_1 \neq B_1$ et $C_1 \neq D_1$, et A, B, C, D les images de A_1, B_1, C_1, D_1 par f^{-1} ; alors $f(A) = A_1$, etc. (Théorème 20.1 (iii) du cours 20 [5]), et $A \neq B$, $C \neq D$, car f^{-1} est une isométrie. Notons q_1 le quotient formé avec A_1, B_1, C_1, D_1, et q celui formé avec A, B, C, D. Comme A_1, B_1, C_1, D_1 sont les images de A, B, C, D par f, le Théorème 21.1 donne $q_1 = q$ si f est un déplacement, et $q_1 = \bar{q}$, donc $q = \overline{q_1}$, si f est un antidéplacement. Or q est le quotient formé avec les images de A_1, B_1, C_1, D_1 par f^{-1} : par le Théorème 21.1, f^{-1} est un déplacement dans le premier cas, un antidéplacement dans le second.

Corollaire 21.1 (Composée de Symétries Orthogonales). Soient $n \geq 1$ un entier et $\mathcal{D}_1$, …, $\mathcal{D}_n$ des droites. La composée $S_{\mathcal{D}_n} \circ \cdots \circ S_{\mathcal{D}_1}$ est un déplacement si n est pair, un antidéplacement si n est impair.

Preuve. Par récurrence sur n (Théorème 1.13 du cours 1 [1]) : pour $n = 1$, c'est le Théorème 21.2 (ii) ; si l'énoncé est vrai pour n, la composée de $n+1$ symétries est $S_{\mathcal{D}_{n+1}} \circ g$, où g est la composée des n premières, et le Théorème 21.3 (i), (ii), avec le Théorème 21.2 (ii), donne l'énoncé pour $n+1$.

21.2 Classification

Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement, et jamais les deux. Les déplacements sont l'identité, les rotations et les translations ; les antidéplacements sont les symétries orthogonales et les symétries glissantes.

Théorème 21.4 (Classification). Toute isométrie est un déplacement ou un antidéplacement, et n'est pas les deux. Plus précisément :

Isométrie	Points invariants	Nature	Symétries
Id	$\mathcal{P}$	déplacement	2
$r(\Omega, \theta)$, $\theta \neq 0$ $[2\pi]$ (dont S_Ω)	$\{\Omega\}$	déplacement	2
$t_{\overrightarrow{w}}$, $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$	$\emptyset$	déplacement	2
$S_\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	antidéplacement	1
$t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\mathcal{D}$ (symétrie glissante)	$\emptyset$	antidéplacement	3

La dernière colonne donne le nombre de symétries orthogonales dont l'isométrie est la composée dans le Théorème 20.22 du cours 20 [5].

Preuve du Théorème 21.4. *Chaque isométrie est l'un ou l'autre.* Par le Théorème 20.22 du cours 20 [5], une isométrie est de l'une des cinq sortes du tableau. Les trois premières sont des déplacements, et $S_{\mathcal{D}}$ un antidéplacement (Théorème 21.2). Une symétrie glissante $t_{\vec{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ est la composée de l'antidéplacement $S_{\mathcal{D}}$ et du déplacement $t_{\vec{w}}$: c'est un antidéplacement (Théorème 21.3 (ii)).

Jamais les deux. Soient U et V les points d'affixes 1 et i. Avec $A = C = O$, $B = U$ et $D = V$, le quotient du Théorème 21.1 est $q = \frac{\mathrm{i}-0}{1-0} = \mathrm{i}$, et $\bar{q} = -\mathrm{i} \neq \mathrm{i}$. Si une isométrie était à la fois un déplacement et un antidéplacement, on aurait $q' = q$ et $q' = \bar{q}$ (Théorème 21.1), donc $\mathrm{i} = -\mathrm{i}$, ce qui est faux.

Lire le théorème. Les points invariants d'un déplacement forment le plan, un point ou l'ensemble vide ; ceux d'un antidéplacement, une droite ou l'ensemble vide. Ils ne distinguent donc pas une translation de vecteur non nul d'une symétrie glissante : la nature, déplacement ou antidéplacement, les sépare.

Théorème 21.5 (Déplacements, Antidéplacements et Symétries). Soit f une isométrie.

(i) f est un déplacement si et seulement si elle est la composée de deux symétries orthogonales.

(ii) f est un antidéplacement si et seulement si elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales.

(iii) f est un antidéplacement si et seulement s'il existe une droite $\mathcal{D}$ et un vecteur $\overrightarrow{w}$, éventuellement nul, tels que $f = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$.

Preuve du Théorème 21.5. Si f est la composée de deux symétries orthogonales, c'est un déplacement ; si elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois, c'est un antidéplacement (Corollaire 21.1). Réciproquement, par le Théorème 21.4, un déplacement n'est pas un antidéplacement : c'est donc Id, une rotation d'angle non nul modulo 2π ou une translation de vecteur non nul, composée de deux symétries orthogonales (Théorème 20.22 du cours 20 [5]) ; un antidéplacement est de même une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante, composée de trois symétries orthogonales (Théorème 20.22). (iii) Si $f = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$, c'est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement (Théorème 21.2), donc un antidéplacement (Théorème 21.3 (ii)). Réciproquement, un antidéplacement est $S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{0}}$ (Définition 20.2 et Théorème 20.1 (ii), car $t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$) ou une symétrie glissante $S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ (Théorème 20.19 (i)).

Exemple 21.1 (Nature d'une Composée). Soient $\mathcal{D}$ une droite, Ω un point et θ un réel. $r(\Omega, \theta) \circ S_{\mathcal{D}}$ et $S_{\mathcal{D}} \circ r(\Omega, \theta)$ sont des antidéplacements (Théorèmes 21.2 et 21.3 (ii)) ; ce ne sont donc ni des rotations ni des translations (Théorème 21.4) : ce sont des symétries orthogonales ou des symétries glissantes.

21.3 Deux Points et leurs Images

Une isométrie est déterminée par trois points non alignés et leurs images (cours 20 [5]). Un déplacement, ou un antidéplacement, l'est déjà par deux points distincts et leurs images.

Unicité

Théorème 21.6 (Unicité). Soient A et B deux points distincts.

(i) Deux déplacements f et g tels que $f(A) = g(A)$ et $f(B) = g(B)$ sont égaux.

(ii) Deux antidéplacements f et g tels que $f(A) = g(A)$ et $f(B) = g(B)$ sont égaux.

Preuve. Dans les deux cas, $h = g^{-1} \circ f$ est un déplacement (Théorème 21.3), qui fixe A et B : $h(A) = g^{-1}(g(A)) = A$ (Théorème 20.1 (iii) du cours 20 [5]), et de même pour B. Par le Théorème 20.17 (ii), $h = \mathrm{Id}$ ou $h = S_{(AB)}$; comme $S_{(AB)}$ est un antidéplacement (Théorème 21.2 (ii)), ce n'est pas un déplacement (Théorème 21.4), donc $h = \mathrm{Id}$. Alors $f = g \circ g^{-1} \circ f = g \circ h = g$ (Théorème 20.1 (i) à (iii)).

Lire le théorème. Pour une isométrie quelconque, deux points ne suffisent pas : Id et $S_{(AB)}$ fixent toutes deux A et B. Savoir s'il s'agit d'un déplacement ou d'un antidéplacement lève l'ambiguïté.

Existence

Théorème 21.7 (Existence). Soient A, B, C, D quatre points tels que $AB = CD \neq 0$. Il existe un déplacement f et un seul tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$, et un antidéplacement g et un seul tel que $g(A) = C$ et $g(B) = D$. La condition $AB = CD$ est nécessaire : une isométrie qui envoie A sur C et B sur D vérifie $CD = AB$.

Preuve. L'unicité est le Théorème 21.6. *Le déplacement.* Soit $B_1 = t_{\overrightarrow{AC}}(B)$; alors $t_{\overrightarrow{AC}}(A) = C$ et $CB_1 = AB = CD \neq 0$ (Théorème 20.6 du cours 20 [5]), donc $B_1 \neq C$. Soit θ une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{CD}\right)$. Comme $CD = CB_1$, le point D est l'image de B_1 par $r(C, \theta)$ (Définition 20.5 et Théorème 20.4 (ii)), qui fixe C. Alors $f = r(C, \theta) \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ envoie A sur C et B sur D ; c'est un déplacement (Théorèmes 21.2 (i) et 21.3 (i)).

L'antidéplacement. Soit $g = S_{(CD)} \circ f$. La symétrie $S_{(CD)}$ fixe C et D (Théorème 20.2 (i)), donc $g(A) = C$ et $g(B) = D$; g est un antidéplacement (Théorèmes 21.2 (ii) et 21.3 (ii)).

21.4 Angle d'un Déplacement

Un déplacement fait tourner tous les vecteurs du même angle. Cet angle permet de le reconnaître : nul modulo 2π pour une translation, égal à θ pour la rotation d'angle θ.

Angle d'un Déplacement

Théorème 21.8 (Angle d'un Déplacement). Soit f un déplacement.

(i) Il existe un nombre complexe k de module 1 tel que, pour tous points $A \neq B$, $b' - a' = k\,(b - a)$.

(ii) Il existe un réel θ tel que, pour tous points $A \neq B$, θ soit une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$; les réels qui conviennent sont les réels égaux à θ modulo 2π, et $k = e^{i\theta}$.

Définition 21.2 (Angle d'un Déplacement). Un tel réel θ est appelé une mesure de l'*angle du déplacement* f ; on dit que f est un déplacement d'angle θ. L'angle est ainsi défini à 2π près.

Angle d'un Déplacement : Preuve

Preuve du Théorème 21.8. (i) Fixons deux points $A_0 \neq B_0$ et posons $k = \dfrac{b'_0 - a'_0}{b_0 - a_0}$; on a $|k| = \dfrac{A'_0B'_0}{A_0B_0} = 1$ (Théorèmes 12.6 (iii) et 12.7 (ii) du cours 12 [3]). Pour $A \neq B$, le Théorème 21.1 (ii), appliqué aux points A_0, B_0, A, B, donne $\dfrac{b' - a'}{b'_0 - a'_0} = \dfrac{b - a}{b_0 - a_0}$, d'où $\dfrac{b' - a'}{b - a} = k$.

(ii) Par le Théorème 12.15, les mesures de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$ sont les arguments de $\frac{b'-a'}{b-a} = k$, qui ne dépendent pas de A et B. Si θ est l'un d'eux, ce sont les réels égaux à θ modulo 2π (Définition 12.6), et $k = |k|\, e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}\theta}$ (Théorème 12.10 (i)).

Théorème 21.9 (Translations et Rotations). Soit f un déplacement d'angle θ.

(i) Si $\theta = 0\ [2\pi]$, f est une translation.

(ii) Si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, f est une rotation d'angle θ, et son centre est son unique point invariant.

(iii) Réciproquement, une translation est un déplacement d'angle 0, et la rotation $r(\Omega, \theta)$ un déplacement d'angle θ.

Preuve du Théorème 21.9. Par le Théorème 21.8, appliqué à $A = O$ et à $B = M \neq O$, l'image d'un point M d'affixe z a pour affixe $z' = e^{i\theta}z + \beta$, où β est l'affixe de $f(O)$; c'est vrai aussi pour $M = O$. (i) Si $\theta = 0\ [2\pi]$, $e^{i\theta} = 1$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [3]) et $z' = z + \beta$: f est la translation de vecteur d'affixe β (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]). (ii) Sinon $e^{i\theta} \neq 1$ (Théorème 12.9 (iii)). Soit $\omega = \dfrac{\beta}{1 - e^{i\theta}}$; alors $\omega = e^{i\theta}\omega + \beta$, d'où, en soustrayant, $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$: $f = r(\Omega, \theta)$, où Ω a pour affixe ω (Théorème 20.4 (ii)) ; Ω est son unique point invariant (Théorème 20.16 (iii)). (iii) Pour $t_{\overrightarrow{w}}$, $b' - a' = b - a$; pour $r(\Omega, \theta)$, $b' - a' = e^{i\theta}(b - a)$ (preuve du Théorème 21.2) : le nombre k du Théorème 21.8 est $1 = e^{i0}$, ou $e^{i\theta}$, et l'on conclut par le Théorème 12.10 (ii).

Angle d'une Composée et d'une Réciproque

Théorème 21.10 (Angle d'une Composée, d'une Réciproque). Soient f et g deux déplacements d'angles θ et θ'.

(i) $g \circ f$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.

(ii) f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.

Preuve. Ce sont des déplacements (Théorème 21.3). Soient $A \neq B$. (i) Par le Théorème 21.8, $b' - a' = e^{i\theta}(b - a)$, puis, pour les images de A' et B' par g, $b'' - a'' = e^{i\theta'}(b' - a') = e^{i(\theta+\theta')}(b - a)$ (Théorème 12.13 (i) du cours 12 [3]) : le nombre k de $g \circ f$ est $e^{i(\theta+\theta')}$, et l'on conclut par le Théorème 12.10 (ii). (ii) Soient $A_1 = f^{-1}(A)$ et $B_1 = f^{-1}(B)$, d'affixes a_1, b_1, distincts car f^{-1} est une isométrie ; comme $f(A_1) = A$ et $f(B_1) = B$, on a $b - a = e^{i\theta}(b_1 - a_1)$, donc $b_1 - a_1 = e^{-i\theta}(b - a)$ (Théorème 12.13 (ii)) : le nombre k de f^{-1} est $e^{-i\theta}$, et l'on conclut par le Théorème 12.10 (ii).

Lire le théorème. Les angles s'ajoutent quand on compose : c'est le Théorème 20.5 (ii) du cours 20 [5] pour deux rotations de même centre, étendu à tous les déplacements.

21.5 Composées de Déplacements

La composée de deux rotations est une rotation, sauf si la somme de leurs angles est nulle modulo 2π : c'est alors une translation. On construit son centre avec des symétries orthogonales.

Théorème 21.11 (Composée de Deux Rotations). Soient Ω et Ω' deux points d'affixes ω et ω', θ et θ' deux réels, et $f = r(\Omega', \theta') \circ r(\Omega, \theta)$.

(i) f est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$. Si $\theta + \theta' \neq 0 \ [2\pi]$, c'est une rotation d'angle $\theta + \theta'$; sinon, c'est une translation.

(ii) Si $\theta + \theta' = 0 \ [2\pi]$, f est la translation de vecteur d'affixe $\left(1 - e^{i\theta'}\right)(\omega' - \omega)$.

(iii) Si $\Omega \neq \Omega'$ et $\theta + \theta' \neq 0 \ [2\pi]$, soient $\Delta = (\Omega\Omega')$, de vecteur directeur $\overrightarrow{\delta}$, $\mathcal{D}_1$ la droite passant par Ω de vecteur directeur $\overrightarrow{w_1}$, où $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{\delta}\right)$, et $\mathcal{D}_2$ la droite passant par Ω' de vecteur directeur $\overrightarrow{w_2}$, où $\frac{\theta'}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{\delta}, \overrightarrow{w_2}\right)$. Alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes en un point I, et $f = r(I, \theta + \theta')$.

Composée de Deux Rotations : Preuve

Preuve du Théorème 21.11. (i) Par les Théorèmes 21.9 (iii) et 21.10 (i), f est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$; on conclut par le Théorème 21.9 (i), (ii). (ii) Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5], f envoie z sur $\omega' + e^{\mathrm{i}\theta'}\left(\omega + e^{\mathrm{i}\theta}\left(z - \omega\right) - \omega'\right)$. Comme $e^{\mathrm{i}\theta'}e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = 1$ (Théorèmes 12.13 (i) et 12.9 (iii) du cours 12 [3]), cette affixe vaut $z + (\omega' - \omega) - e^{\mathrm{i}\theta'}\left(\omega' - \omega\right) = z + \left(1 - e^{\mathrm{i}\theta'}\right)\left(\omega' - \omega\right)$ (Théorème 20.4 (i)).

Preuve du Théorème 21.11 (iii). Soit δ_0 l'affixe de $\overrightarrow{\delta}$; écrivons $\delta_0 = |\delta_0|\, e^{\mathrm{i}\gamma}$ (Théorème 12.10 (i) du cours 12 [3]). Alors les vecteurs d'affixes $e^{\mathrm{i}\left(\gamma-\frac{\theta}{2}\right)}$ et $e^{\mathrm{i}\left(\gamma+\frac{\theta'}{2}\right)}$ conviennent pour $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ (Théorèmes 12.15, 12.13 (ii) et 12.10 (ii)). Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne dépendent pas de ce choix : si $\frac{\theta}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{\delta}\right)$ et de $\left(\overrightarrow{w_1'}, \overrightarrow{\delta}\right)$, d'affixes c_1 et c_1' pour $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_1'}$, alors $\frac{\delta_0}{c_1}$ et $\frac{\delta_0}{c_1'}$ ont l'argument $\frac{\theta}{2}$ (Théorème 12.15), et leur quotient $\frac{c_1'}{c_1}$ a pour argument 0 (Théorème 12.14 (ii)), il est donc réel (Théorème 12.14 (iv)), et ces vecteurs sont colinéaires (Théorème 12.7 (i)) : ils dirigent la même droite passant par Ω (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [4]) ; de même pour $\mathcal{D}_2$.

Composée de Deux Rotations : Construction du Centre (Suite)

Par le Théorème 20.14 (i) du cours 20 [5], appliqué d'abord à $r(\Omega,\theta)$ avec les droites $\mathcal{D}_1$ et Δ, puis à $r(\Omega',\theta')$ avec Δ et $\mathcal{D}_2$, on a $r(\Omega,\theta)=S_\Delta\circ S_{\mathcal{D}_1}$ et $r(\Omega',\theta')=S_{\mathcal{D}_2}\circ S_\Delta$, d'où, S_Δ étant une involution, $f=S_{\mathcal{D}_2}\circ S_\Delta\circ S_\Delta\circ S_{\mathcal{D}_1}=S_{\mathcal{D}_2}\circ S_{\mathcal{D}_1}$ (Théorèmes 20.1 et 20.5 (iii)). Les droites ne dépendant pas du choix des vecteurs, on prend désormais pour $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ les vecteurs d'affixes $e^{\mathrm{i}\left(\gamma-\frac{\theta}{2}\right)}$ et $e^{\mathrm{i}\left(\gamma+\frac{\theta'}{2}\right)}$; le quotient de leurs affixes est $\varrho=e^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$ (Théorème 12.13 (ii) du cours 12 [3]), de module 1. S'il était réel, on aurait $\varrho=\pm1$ (Théorème 12.6 (i)), donc $\varrho^2=1$, c'est-à-dire $e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}=1$ et $\theta+\theta'=0\ [2\pi]$ (Théorème 12.9 (iii)), ce qui est exclu. Donc $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 12.7 (i)) ; comme deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [4]), $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles (Définition 14.6 (iii)) : comme toute droite a une équation cartésienne (Théorème 14.12 (ii) et Définition 14.10), elles sont sécantes en un point I (Théorème 14.14). Par le Théorème 20.12, $f=r\left(I,2\times\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$, car $\frac{\theta+\theta'}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2}\right)$ (Théorèmes 12.10 (ii) et 12.15).

Théorème 21.12 (Translation et Rotation). Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe c, Ω un point d'affixe ω et $\theta \neq 0 \ [2\pi]$. Alors $t_{\overrightarrow{w}} \circ r(\Omega, \theta)$ et $r(\Omega, \theta) \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sont des rotations d'angle θ, de centres respectifs les points d'affixes

$$\omega + \frac{c}{1 - e^{i\theta}} \qquad \text{et} \qquad \omega + \frac{e^{i\theta} c}{1 - e^{i\theta}}.$$

Preuve. Ce sont des déplacements d'angle $0 + \theta = \theta$ (Théorèmes 21.9 (iii) et 21.10 (i)), donc des rotations d'angle θ (Théorème 21.9 (ii)), dont le centre est l'unique point invariant. Par le Théorème 20.4 du cours 20 [5], $t_{\overrightarrow{w}} \circ r(\Omega, \theta)$ envoie z sur $\omega + e^{i\theta}(z - \omega) + c$, et z est invariant si et seulement si $\left(1 - e^{i\theta}\right)(z - \omega) = c$; de même, $r(\Omega, \theta) \circ t_{\overrightarrow{w}}$ envoie z sur $\omega + e^{i\theta}(z + c - \omega)$, et z est invariant si et seulement si $\left(1 - e^{i\theta}\right)(z - \omega) = e^{i\theta} c$. On divise par $1 - e^{i\theta} \neq 0$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [3]).

Deux Rotations

Exemple 21.2 (Deux Rotations). Soient $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ et $r' = r\left(U, \frac{\pi}{2}\right)$, où U a pour affixe 1. Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5], $r' \circ r$ envoie z sur $1 + \mathrm{i}\left(\mathrm{i}z - 1\right) = -z + 1 - \mathrm{i}$: c'est la rotation d'angle π, c'est-à-dire la symétrie centrale (Théorème 20.4 (iii)), de centre le point d'affixe $\frac{1-\mathrm{i}}{2}$. Et $r\left(U, -\frac{\pi}{2}\right) \circ r$ envoie z sur $1 - \mathrm{i}\left(\mathrm{i}z - 1\right) = z + 1 + \mathrm{i}$: c'est la translation (Théorème 20.4 (i)) de vecteur d'affixe $\left(1 - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)(1 - 0) = 1 + \mathrm{i}$, comme le dit le Théorème 21.11 (ii).

21.6 Écritures Complexes

Les déplacements sont les applications $z \mapsto az + b$, et les antidéplacements les applications $z \mapsto a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$. On lit leur nature et leurs éléments sur a et b.

Écriture Complexe d'un Déplacement

Théorème 21.13 (Écriture Complexe d'un Déplacement). Soit f une application du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un déplacement ;

(ii) il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = 1$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = az + b$ (Définition 12.7 du cours 12 [3]).

Dans ce cas, les mesures de l'angle de f sont les arguments de a. Si $a = 1$, f est la translation de vecteur d'affixe b ; si $a \neq 1$, f est la rotation de centre le point d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$ et d'angle de mesure un argument de a.

Écriture Complexe d'un Déplacement : Preuve

Preuve du Théorème 21.13. (i) $\Rightarrow$ (ii) : c'est la première phrase de la preuve du Théorème 21.9, avec $a = e^{i\theta}$, de module 1 (Théorème 12.9 (i) du cours 12 [3]), et $b = \beta$. (ii) $\Rightarrow$ (i) : pour tous points M_1, M_2, $z_2' - z_1' = a(z_2 - z_1)$, de module $|z_2 - z_1|$ (Théorèmes 12.6 (ii) et 12.7 (ii)) : f est une isométrie. Pour des points $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$ d'affixes z_1, z_2, z_3, z_4, on a donc $\frac{z_4' - z_3'}{z_2' - z_1'} = \frac{a(z_4 - z_3)}{a(z_2 - z_1)} = \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$: f est un déplacement (Théorème 21.1). Le nombre k du Théorème 21.8 est alors a : par le Théorème 21.8 (ii), si θ est une mesure de l'angle de f, $a = e^{i\theta}$, et θ est un argument de a (Théorème 12.10 (ii)) ; réciproquement, si θ' est un argument de a, $\theta' = \theta \ [2\pi]$ (Théorème 12.10 (iii)), donc θ' est une mesure de l'angle de f : les mesures de l'angle de f sont les arguments de a. Si $a = 1$, c'est le Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5] ; si $a \neq 1$, on pose $\omega = \frac{b}{1-a}$, et $z' - \omega = a(z - \omega)$, comme dans la preuve du Théorème 21.9 (ii) ; on écrit $a = e^{i\theta}$ (Théorème 12.10 (i)) et l'on conclut par le Théorème 20.4 (ii).

Écriture Complexe d'un Antidéplacement

Théorème 21.14 (Écriture Complexe d'un Antidéplacement). Soit f une application du plan. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un antidéplacement ;

(ii) il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = 1$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$.

Dans ce cas, $f \circ f$ est la translation de vecteur d'affixe $a\bar{b} + b$.

Écriture Complexe d'un Antidéplacement : Preuve

Preuve du Théorème 21.14. (i) $\Rightarrow$ (ii) : soient U le point d'affixe 1 et β, β_1 les affixes de $f(O)$ et $f(U)$. Pour $M \neq O$, le Théorème 21.1 (iii), appliqué aux points O, U, O, M, donne $\frac{z'-\beta}{\beta_1-\beta} = \overline{\left(\frac{z-0}{1-0}\right)} = \bar{z}$, d'où $z' = a\bar{z} + b$, avec $a = \beta_1 - \beta$ et $b = \beta$; c'est vrai aussi pour $M = O$. De plus $|a| = f(O)\,f(U) = OU = 1$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [3]).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : pour tous points M_1, M_2, $z_2' - z_1' = a\,(\overline{z_2} - \overline{z_1}) = a\,\overline{z_2 - z_1}$ (Théorème 12.4 (i)), de module $|z_2 - z_1|$ (Théorème 12.6 (i), (ii)) : f est une isométrie. Pour $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$, $\frac{z_4'-z_3'}{z_2'-z_1'} = \frac{\overline{z_4-z_3}}{\overline{z_2-z_1}} = \overline{\left(\frac{z_4-z_3}{z_2-z_1}\right)}$ (Théorème 12.6 (iii)) : f est un antidéplacement (Théorème 21.1).

Enfin $f(f(M))$ a pour affixe $a\,\overline{a\bar{z} + b} + b = a\bar{a}z + a\bar{b} + b = z + a\bar{b} + b$ (Théorème 12.4 (i), (iii)), et l'on conclut par le Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5].

Exemple 21.3 (Reconnaître un Déplacement). Soit $f : z \mapsto z' = -\mathrm{i}z + 2$. Comme $|-\mathrm{i}| = 1$, f est un déplacement (Théorème 21.13). Comme $-\mathrm{i} = e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} \neq 1$, c'est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe

$$\omega = \frac{2}{1+\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = 1-\mathrm{i}.$$

Vérification : $-\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) + 2 = -\mathrm{i} - 1 + 2 = 1 - \mathrm{i}$, et
$z' - (1-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i} = -\mathrm{i}(z - (1-\mathrm{i}))$.

Exemple 21.4 (Deux Points et leurs Images). Soient A, B, C, D les points d'affixes 0, 1, 2, $2+\mathrm{i}$: $AB = CD = 1$. Le déplacement f du Théorème 21.7 s'écrit $z' = \alpha z + \beta$ (Théorème 21.13), avec $f(0) = \beta = 2$ et $f(1) = \alpha + 2 = 2 + \mathrm{i}$: $z' = \mathrm{i}z + 2$, rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre le point d'affixe $\frac{2}{1-\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i}$. L'antidéplacement g s'écrit $z' = \alpha' \bar{z} + \beta'$ (Théorème 21.14), avec $g(0) = \beta' = 2$ et $g(1) = \alpha' + 2 = 2 + \mathrm{i}$: $z' = \mathrm{i}\bar{z} + 2$. Dans les deux cas, le coefficient i est de module 1.

21.7 Antidéplacements et Forme Réduite

Un antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante. On écrit une symétrie glissante sous sa forme réduite, et l'on trouve son axe et son vecteur à partir d'un point et de ses images.

Définition 21.3 (Forme Réduite). Soit f une symétrie glissante d'axe $\mathcal{D}$ et de vecteur $\overrightarrow{w}$ (Définition 20.7 du cours 20 [5]). L'écriture

$$f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ t_{\overrightarrow{w}},$$

où $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, est appelée la *forme réduite* de f ; $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{w}$ sont ses *éléments caractéristiques*. Les deux égalités sont vraies (Théorème 20.19 (i)), et $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{w}$ sont uniques (Théorème 20.20 (iii)).

Remarque 21.2 (D'autres Écritures). Une composée $t_{\overrightarrow{w'}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, où $\overrightarrow{w'}$ n'est pas colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}'$, est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante, dont le Théorème 20.19 (iii) et (i) donne l'axe et, dans le second cas, la forme réduite ; seule la forme réduite donne directement l'axe et le vecteur.

Propriétés d'une Symétrie Glissante

Théorème 21.15 (Propriétés d'une Symétrie Glissante). Soit $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$ une symétrie glissante sous forme réduite. Pour tout point M, on note $M' = f(M)$ et $M'' = f(M')$.

(i) Le milieu de $[MM']$ appartient à $\mathcal{D}$.

(ii) Si $M \in \mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$.

(iii) $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{w}$.

Ainsi $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM''}$, et $\mathcal{D}$ passe par le milieu de $[MM']$ et est dirigée par $\overrightarrow{w}$.

Propriétés d'une Symétrie Glissante : Preuve

Preuve du Théorème 21.15. (i) Soient $M_1 = S_{\mathcal{D}}(M)$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, milieu de $[MM_1]$ (Définition 20.4 du cours 20 [5]). Avec les affixes, $M' = t_{\overrightarrow{w}}(M_1)$ a pour affixe $z_1 + c$, où c est l'affixe de $\overrightarrow{w}$, et le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $\frac{z+z_1+c}{2} = h + \frac{c}{2}$ (Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [3]) : $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$ (Théorème 12.7 (i)). Comme $H \in \mathcal{D}$ et que $\overrightarrow{w}$ est colinéaire aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$, $I \in \mathcal{D}$ (Définition 14.6 et Théorème 14.5 (i) du cours 14 [4]). (ii) Si $M \in \mathcal{D}$, $S_{\mathcal{D}}(M) = M$ (Théorème 20.2 (i)), donc $M' = t_{\overrightarrow{w}}(M)$. (iii) $M'' = f \circ f(M) = t_{2\overrightarrow{w}}(M)$ (Théorème 20.20 (ii)). Enfin, $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ dirige $\mathcal{D}$ (Définition 14.6 (ii)), qui passe par le milieu de $[MM']$ par (i).

Reconnaître un Antidéplacement

Théorème 21.16 (Reconnaître un Antidéplacement). Soit f un antidéplacement.

(i) f est une symétrie orthogonale si et seulement si $f \circ f = \mathrm{Id}$, si et seulement si f a au moins un point invariant ; son axe est alors l'ensemble de ses points invariants.

(ii) Sinon, f est une symétrie glissante, de vecteur $\overrightarrow{w} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM''}$ pour tout point M.

(iii) Si f a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$, f est une symétrie orthogonale si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$, et sinon une symétrie glissante de vecteur d'affixe $\frac{1}{2}\left(a\bar{b} + b\right)$.

Preuve. Par le Théorème 21.4, f est une symétrie orthogonale $S_{\mathcal{D}}$ ou une symétrie glissante $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$. Dans le premier cas, $f \circ f = \mathrm{Id}$ (Théorème 20.5 (iii) du cours 20 [5]) et les points invariants sont ceux de $\mathcal{D}$ (Théorème 20.16 (ii)) ; dans le second, $f \circ f = t_{2\overrightarrow{w}} \neq \mathrm{Id}$, car $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ (Théorèmes 20.20 (ii) et 20.16 (iv)), et f n'a aucun point invariant (Théorème 20.20 (i)). D'où (i) et (ii), avec le Théorème 21.15 (iii). (iii) Par le Théorème 21.14, $f \circ f$ est la translation de vecteur d'affixe $a\bar{b} + b$; elle est égale à $\mathrm{Id} = t_{\overrightarrow{0}}$ si et seulement si $a\bar{b} + b = 0$, car deux translations égales ont le même vecteur (image d'un point). Dans le second cas, $2\overrightarrow{w}$ a pour affixe $a\bar{b} + b$.

Reconnaître un Antidéplacement : Exemples

Exemple 21.5 (Une Symétrie Glissante). Soit $f : z \mapsto z' = \mathrm{i}\bar{z} + 1$. Comme $|\mathrm{i}| = 1$, c'est un antidéplacement (Théorème 21.14). Ici $a\bar{b} + b = \mathrm{i} + 1 \neq 0$: f est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ (Théorème 21.16 (iii)). L'image de O a pour affixe 1 ; le milieu de $[Of(O)]$, d'affixe $\frac{1}{2}$, est sur l'axe (Théorème 21.15 (i)) : l'axe est la droite passant par le point $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, d'équation $y = x - \frac{1}{2}$.

Exemple 21.6 (Une Symétrie Orthogonale). Soit $g : z \mapsto z' = \mathrm{i}\bar{z} + 1 - \mathrm{i}$. Ici $a\bar{b} + b = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i} - 1 + 1 - \mathrm{i} = 0$: g est une symétrie orthogonale (Théorème 21.16 (iii)). Ses points invariants vérifient $z = \mathrm{i}\bar{z} + 1 - \mathrm{i}$; avec $z = x + \mathrm{i}y$, cela s'écrit $x + \mathrm{i}y = y + 1 + \mathrm{i}(x - 1)$, soit $y = x - 1$: l'axe est la droite d'équation $y = x - 1$ (Théorème 21.16 (i)).

Lire le théorème. Pour un antidéplacement, on calcule $f \circ f$: l'identité signale une symétrie orthogonale, une translation de vecteur non nul une symétrie glissante, dont le vecteur est la moitié de celui de $f \circ f$.

Conclusion

On retient la définition par les angles orientés, la classification, la caractérisation par deux points, l'angle d'un déplacement et les écritures complexes $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- Un déplacement conserve les angles orientés, un antidéplacement les change en leurs opposés ; on le lit sur $q = \frac{d-c}{b-a}$: $q' = q$ ou $q' = \bar{q}$ (Définition 21.1, Théorème 21.1).
- Translations et rotations sont des déplacements, symétries orthogonales et symétries glissantes des antidéplacements ; toute isométrie est l'un ou l'autre, jamais les deux (Théorèmes 21.2 et 21.4).
- Deux déplacements, ou deux antidéplacements, se composent en un déplacement ; un déplacement et un antidéplacement, en un antidéplacement ; un déplacement est la composée de deux symétries orthogonales, un antidéplacement d'une ou de trois (Théorèmes 21.3 et 21.5).
- Si $AB = CD \neq 0$, il existe un unique déplacement et un unique antidéplacement qui envoient A sur C et B sur D (Théorèmes 21.6 et 21.7).
- Un déplacement a un angle, défini à 2π près : nul pour une translation, θ pour $r(\Omega, \theta)$; les angles s'ajoutent par composition (Théorèmes 21.8 à 21.10) ; deux rotations se composent en une rotation ou une translation (Théorème 21.11).
- Déplacement : $z' = az + b$; antidéplacement : $z' = a\bar{z} + b$; $|a| = 1$ (Théorèmes 21.13 et 21.14). Pour un antidéplacement, $f \circ f$ distingue la symétrie orthogonale de la symétrie glissante (Théorème 21.16).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] H. Smida, M. Sakrani, T. Charrada, R. Bouida, M. El Arbi, K. Kaâniche Ben Messaoud et N. Mziou.
Mathématiques, 4e année de l'enseignement secondaire tunisien, tome 2.
Centre National Pédagogique, 2023.