Cours 22

Similitudes

Mathématiques, niveau baccalauréat

Mohamed Kadhem Karray

mohamedkadhem.com/baccalaureat

16 novembre 2026

Je remercie Nizar et Amine Lahyani, qui m'ont motivé à rédiger ce document. Je remercie également les auteurs du manuel [7], qui en est la principale source.

Plan

Introduction

22.1 Homothéties

22.2 Similitudes

22.3 Similitudes Directes et Indirectes

22.4 Écritures Complexes

22.5 Deux Points et leurs Images

22.6 Similitudes Directes

22.7 Similitudes Indirectes

Conclusion

Introduction

Une similitude multiplie toutes les distances par un même réel $k > 0$. Les isométries sont les similitudes de rapport 1, les homothéties en sont d'autres. Cette leçon ramène l'étude des similitudes à celle des isométries, sépare les similitudes directes des indirectes et lit leurs éléments sur leurs écritures complexes.

Où se place cette leçon

- **Prérequis :** les isométries (cours 20 [5]) ; les déplacements et les antidéplacements, leurs écritures complexes $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$ (cours 21 [6]) ; les affixes, les arguments et les angles orientés (cours 12 [2]).
- **Les objets :** les homothéties ; les similitudes, directes et indirectes ; le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe ; le centre, le rapport et l'axe d'une similitude indirecte.
- **Ce qu'on saura faire :** reconnaître une similitude sur son écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$; trouver la similitude directe, ou indirecte, qui envoie deux points donnés sur deux points donnés ; écrire la forme réduite d'une similitude.

Conventions

- Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ du cours 12 [2] ; les affixes sont prises dans ce repère (Définition 12.4). Pour une application du plan f, on note $A' = f(A)$, $M' = f(M)$, etc., et a, a', z, z' leurs affixes.
- Dans une écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$ (Définition 12.7 du cours 12 [2]), les lettres a et b désignent des coefficients ; les points sont alors notés M, M_1, M_2, d'affixes z, z_1, z_2.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\dfrac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15) ; on note $\theta = \theta' \ [2\pi]$ l'égalité modulo 2π.
- Les notations des transformations sont celles des cours 20 [5] et 21 [6] : Id, $t_{\overrightarrow{w}}$, S_Ω, $S_\mathcal{D}$, $r(\Omega, \theta)$, et $g \circ f$: d'abord f, puis g.

Ce que l'on reprend des cours 12, 20 et 21

- **Nombres complexes** (cours 12 [2]) : $AB = |b - a|$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$ (Théorème 12.7) ; un nombre non nul de module r et d'argument θ est $re^{i\theta}$ (Théorème 12.10) ; $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ a pour mesures les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15).
- **Isométries** (cours 20 [5]) : écritures complexes de $t_{\vec{w}}$, $r(\Omega, \theta)$, S_Ω, $S_\mathcal{D}$ (Théorème 20.4) ; une isométrie est bijective, sa réciproque et la composée de deux isométries sont des isométries (Théorème 20.9) ; une isométrie conserve le produit scalaire et les combinaisons linéaires de vecteurs (Théorèmes 20.7 et 20.8) ; deux isométries égales en trois points non alignés sont égales (Théorème 20.10).
- **Déplacements et antidéplacements** (cours 21 [6]) : définition par les angles orientés, lue sur $q = \frac{d-c}{b-a}$ (Définition 21.1, Théorème 21.1) ; toute isométrie est l'un ou l'autre, jamais les deux (Théorème 21.4) ; un déplacement s'écrit $z' = az + b$, un antidéplacement $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = 1$ (Théorèmes 21.13 et 21.14) ; un antidéplacement est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante (Théorème 21.16).

Ces énoncés sont cités par leur numéro ; ils ne sont pas redémontrés.

22.1 Homothéties

Une homothétie de centre Ω et de rapport k agrandit ou réduit toutes les figures à partir de Ω. Elle multiplie les vecteurs par k, les distances par $|k|$, et conserve les angles orientés.

Définition 22.1 (Homothétie). Soient Ω un point et k un réel non nul. L'*homothétie de centre* Ω *et de rapport* k, notée $h(\Omega, k)$, associe à tout point M l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

(Théorème 14.1 (i) du cours 14 [3]). Comme $\overrightarrow{\Omega\Omega} = \overrightarrow{0}$, on a $h(\Omega, k)(\Omega) = \Omega$ (Théorème 14.3 (i), (ii)).

Remarque 22.1 (Deux Cas Particuliers). $h(\Omega, 1) = \mathrm{Id}$, car $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donne $M' = M$ (Théorème 14.1 (i)). $h(\Omega, -1) = S_\Omega$: $\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{M\Omega}$ dit que Ω est le milieu de $[MM']$ (Théorème 14.3 (i), (iii) et Définition 20.3 du cours 20 [5]). C'est la définition qu'emploie le Théorème 12.18 (ii) du cours 12 [2], et celle qu'annonce la Remarque 20.2.

Écriture Complexe d'une Homothétie

Théorème 22.1 (Écriture Complexe d'une Homothétie). Soient Ω un point d'affixe ω et k un réel non nul.

(i) $M' = h(\Omega, k)(M)$ si et seulement si $z' - \omega = k(z - \omega)$.

(ii) Réciproquement, soient k un réel différent de 0 et de 1, et b un nombre complexe. L'application d'écriture complexe $z' = kz + b$ est l'homothétie de rapport k et de centre le point d'affixe $\dfrac{b}{1-k}$, son unique point invariant.

Preuve. (i) C'est le Théorème 12.18 (ii) du cours 12 [2] : les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $k\overrightarrow{\Omega M}$ ont pour affixes $z' - \omega$ et $k(z - \omega)$ (Théorème 12.7 (i)), et deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont la même affixe (Définition 12.4 (ii) et Remarque 14.3 du cours 14 [3]). (ii) Posons $\omega = \frac{b}{1-k}$, de sorte que $\omega = k\omega + b$. En soustrayant, $z' - \omega = k(z - \omega)$: c'est $h(\Omega, k)$ par (i). Un point d'affixe z est invariant si et seulement si $z = kz + b$, soit $(1 - k)z = b$, soit $z = \omega$.

Propriétés d'une Homothétie

Théorème 22.2 (Propriétés d'une Homothétie). Soient Ω un point, k un réel non nul et $h = h(\Omega, k)$.

(i) *Propriété caractéristique.* Pour tous points M et N, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$. Réciproquement, si $k \neq 1$, une application du plan f telle que $\overrightarrow{f(M)f(N)} = k\overrightarrow{MN}$ pour tous points M et N est une homothétie de rapport k.

(ii) Pour tous points M et N, $M'N' = |k|\, MN$.

(iii) h conserve les angles orientés : si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors $A' \neq B'$, $C' \neq D'$, et $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures.

(iv) h est une bijection, de réciproque $h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$.

Propriétés d'une Homothétie : Preuve

Preuve du Théorème 22.2. Soient M_1, M_2 deux points d'affixes z_1, z_2. Par le Théorème 22.1 (i), $z_2' - z_1' = (\omega + k(z_2 - \omega)) - (\omega + k(z_1 - \omega)) = k(z_2 - z_1)$.

- (i) Les deux membres ont la même affixe (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2]), donc sont égaux. Réciproquement, soient A un point et $A' = f(A)$; pour tout point M, $z' - a' = k(z - a)$ (Théorème 12.7 (i) et Remarque 14.3 du cours 14 [3]), soit $z' = kz + (a' - ka)$: c'est une homothétie de rapport k (Théorème 22.1 (ii)).
- (ii) $M_1'M_2' = |k(z_2 - z_1)| = |k|\,|z_2 - z_1| = |k|\,M_1M_2$ (Théorèmes 12.6 (i), (ii) et 12.7 (ii)).
- (iii) Par (ii), $A'B' = |k|\,AB \neq 0$, et de même $C'D' \neq 0$. Alors $\dfrac{d' - c'}{b' - a'} = \dfrac{k(d - c)}{k(b - a)} = \dfrac{d - c}{b - a}$, et l'on conclut par le Théorème 12.15.
- (iv) Par le Théorème 22.1 (i), $h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ h$ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe $\omega + \frac{1}{k} \times k(z - \omega) = z$, et de même pour $h \circ h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$: les deux composées sont Id, et l'on conclut par le Théorème 20.1 (iv) du cours 20 [5].

Théorème 22.3 (Composées). Soient Ω et Ω' deux points d'affixes ω et ω', k et k' deux réels non nuls, $h = h(\Omega, k)$ et $h' = h(\Omega', k')$.

(i) *Même centre :* $h(\Omega, k') \circ h(\Omega, k) = h(\Omega, kk')$.

(ii) Si $kk' \neq 1$, $h' \circ h$ est l'homothétie de rapport kk' et de centre le point J tel que $\overrightarrow{\Omega J} = \dfrac{1-k'}{1-kk'}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

(iii) Si $kk' = 1$, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

(iv) Si $k \neq 1$ et $k' \neq 1$, $h' \circ h = h \circ h'$ si et seulement si $\Omega = \Omega'$.

(v) *Avec une translation.* Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe c, et $k \neq 1$. Alors $t_{\overrightarrow{w}} \circ h$ et $h \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sont des homothéties de rapport k, de centres respectifs les points d'affixes

$$\omega + \frac{c}{1-k} \qquad \text{et} \qquad \omega + \frac{kc}{1-k}.$$

Preuve du Théorème 22.3. On utilise les Théorèmes 22.1 et 20.4 (i) du cours 20 [5]. La composée $h' \circ h$ envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe

$$\omega' + k'\left(\omega + k\left(z - \omega\right) - \omega'\right) = kk'z + \beta, \qquad \text{où } \beta = \left(1 - k'\right)\omega' + k'\left(1 - k\right)\omega.$$

- (i) Si $\omega' = \omega$: $\beta = (1 - kk')\,\omega$, et $kk'z + \beta - \omega = kk'\,(z - \omega)$; c'est $h\,(\Omega, kk')$ (Théorème 22.1 (i)).
- (ii) Par le Théorème 22.1 (ii), c'est l'homothétie de rapport kk' et de centre d'affixe $\frac{\beta}{1-kk'}$; or $\beta - (1 - kk')\,\omega = (1 - k')\,\omega' + (k' - 1)\,\omega = (1 - k')\,(\omega' - \omega)$, donc $\frac{\beta}{1-kk'} - \omega = \frac{1-k'}{1-kk'}\,(\omega' - \omega)$, et l'on conclut par le Théorème 12.7 (i) du cours 12 [2].
- (iii) Si $kk' = 1$, le même calcul donne $\beta = (1 - k')\,(\omega' - \omega)$, et $h' \circ h$ envoie z sur $z + \beta$.

Preuve du Théorème 22.3 (suite).

- (iv) De même, $h \circ h'$ envoie z sur $kk'z + \beta'$, avec $\beta' = (1-k)\,\omega + k\,(1-k')\,\omega'$. Les deux applications sont égales si et seulement si $\beta = \beta'$ (prendre $z = 0$), et $\beta - \beta' = (1-k)\,(1-k')\,(\omega' - \omega)$, nul si et seulement si $\omega' = \omega$.
- (v) $t_{\overrightarrow{w}} \circ h$ envoie z sur $kz + (1-k)\,\omega + c$, et $h \circ t_{\overrightarrow{w}}$ sur $kz + (1-k)\,\omega + kc$; on divise par $1-k$ (Théorème 22.1 (ii)).

Composées : Exemple

Exemple 22.1 (Deux Homothéties). Soient A le point d'affixe 2, $h = h(O, 2)$ et $h' = h\left(A, \frac{1}{2}\right)$.

- **Étape 1.** Ici $kk' = 2 \times \frac{1}{2} = 1$: par le Théorème 22.3 (iii), $h' \circ h$ est la translation de vecteur $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \overrightarrow{OA}$, d'affixe 1.
- **Étape 2.** On le vérifie par les écritures complexes (Théorème 22.1 (i)) : h envoie z sur $2z$, puis h' envoie $2z$ sur $2 + \frac{1}{2}(2z - 2) = z + 1$.
- **Étape 3.** Dans l'autre ordre, h envoie $2 + \frac{1}{2}(z - 2) = \frac{1}{2}z + 1$ sur $z + 2$: $h \circ h'$ est la translation de vecteur d'affixe 2. Les deux composées sont différentes, comme l'annonce le Théorème 22.3 (iv) ($O \neq A$).

Lire le théorème. Composer deux homothéties multiplie les rapports ; si le produit vaut 1, les agrandissements se compensent et il ne reste qu'un glissement, une translation.

22.2 Similitudes

Une similitude de rapport k s'écrit comme une homothétie de rapport k composée avec une isométrie. Cette décomposition ramène ses propriétés à celles des isométries du cours 20 [5].

Définition 22.2 (Similitude). Soit k un réel strictement positif. Une *similitude de rapport k* est une application du plan f qui multiplie les distances par k : pour tous points M et N, d'images M' et N',

$$M'N' = k\,MN.$$

Remarque 22.2 (Le Rapport). Le rapport d'une similitude f est unique : si $M \neq N$, $k = \dfrac{M'N'}{MN}$. Les similitudes de rapport 1 sont les isométries (Définition 20.6 du cours 20 [5]).

Théorème 22.4 (Homothéties et Composées).

(i) Pour tout point Ω et tout réel $k \neq 0$, $h(\Omega, k)$ est une similitude de rapport $|k|$.

(ii) Si f et g sont des similitudes de rapports k et k', $g \circ f$ est une similitude de rapport kk'.

Preuve. (i) C'est le Théorème 22.2 (ii). (ii) Pour tous points M et N, $g(f(M))\,g(f(N)) = k'\,f(M)\,f(N) = k'k\,MN$.

Décomposition

Théorème 22.5 (Décomposition). Soient f une similitude de rapport k et Ω un point.

(i) $g = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est une isométrie, et $f = h(\Omega, k) \circ g$.

(ii) $g' = f \circ h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$ est une isométrie, et $f = g' \circ h(\Omega, k)$.

(iii) Réciproquement, si h est une homothétie de rapport k' et g une isométrie, $h \circ g$ et $g \circ h$ sont des similitudes de rapport $|k'|$.

Remarque 22.3 (Une Décomposition parmi d'Autres). L'isométrie g dépend du point Ω choisi : la décomposition n'est pas unique. On choisit Ω selon le besoin, souvent $\Omega = O$ pour les écritures complexes.

Preuve du Théorème 22.5. (i) Par le Théorème 22.4, g est une similitude de rapport $\frac{1}{k} \times k = 1$, c'est-à-dire une isométrie (Remarque 22.2). Par le Théorème 22.2 (iv) et le Théorème 20.1 (i) à (iii) du cours 20 [5], $h(\Omega, k) \circ g = h(\Omega, k) \circ h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ f = \mathrm{Id} \circ f = f$. (ii) De même, $g' \circ h(\Omega, k) = f \circ h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ h(\Omega, k) = f$. (iii) g est une similitude de rapport 1 (Remarque 22.2) et h une similitude de rapport $|k'|$ (Théorème 22.4 (i)) ; on conclut par le Théorème 22.4 (ii).

Théorème 22.6 (Propriétés d'une Similitude). Soit f une similitude de rapport k.

(i) f est une bijection, et f^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

(ii) Pour tous points A, B, C, D, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

(iii) Pour tous points A, B, C, D, E, F et tous réels x, y : si $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{EF}$, alors $\overrightarrow{C'D'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{E'F'}$.

Preuve du Théorème 22.6. Écrivons $f = h \circ g$, avec $h = h(O, k)$ et g une isométrie (Théorème 22.5 (i)). (i) g et h sont des bijections (Théorème 20.9 (ii) du cours 20 [5] et Théorème 22.2 (iv)), donc f aussi, et $f^{-1} = g^{-1} \circ h\left(O, \frac{1}{k}\right)$ (Théorème 20.1 (v)) ; g^{-1} est une isométrie (Théorème 20.9 (ii)), et f^{-1} une similitude de rapport $\frac{1}{k} \times 1$ (Théorème 22.4).

(ii) et (iii) Notons $A_1 = g(A)$, etc. ; alors $A' = h(A_1)$ et $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A_1B_1}$ (Théorème 22.2 (i)). (ii) Par le Théorème 15.3 (i), (ii) du cours 15 [4], $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = k^2\, \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \overrightarrow{C_1D_1}$, égal à $k^2\, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ par le Théorème 20.7 (ii). (iii) Le Théorème 20.8 donne $\overrightarrow{C_1D_1} = x\overrightarrow{A_1B_1} + y\overrightarrow{E_1F_1}$; on multiplie par k (Théorème 14.2 du cours 14 [3]).

Corollaire 22.1 (Configurations). Soit f une similitude de rapport k ; on note $A' = f(A)$, etc.

(i) Si I est le milieu de $[AB]$, alors I' est le milieu de $[A'B']$.

(ii) A, B, C sont alignés si et seulement si A', B', C' sont alignés.

(iii) Si $A \neq B$, l'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$, et l'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$, de longueur $k\,AB$.

(iv) Les images de deux droites parallèles (resp. perpendiculaires) sont parallèles (resp. perpendiculaires).

(v) Si $B \neq A$ et $C \neq A$, alors $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$.

(vi) L'image du cercle de centre I et de rayon R est le cercle de centre I' et de rayon kR.

(vii) *Contact.* Si une droite et un cercle ont un seul point commun (la droite est tangente au cercle), leurs images ont un seul point commun.

Preuve du Corollaire 22.1. Les preuves des points (i) à (iv) et (vii) du Corollaire 20.1 du cours 20 [5] donnent (i) à (iv) (la preuve du point (vii) du Corollaire 20.1 donne le segment de (iii)), en remplaçant le Théorème 20.8 par le Théorème 22.6 (iii), le Théorème 20.7 (ii) par le Théorème 22.6 (ii), où $k^2 \neq 0$, et l'égalité $A'B' = AB$ par $A'B' = k\,AB$: si $A \neq B$, alors $A' \neq B'$, et si $f(N) = f(C)$, alors $NC = \frac{1}{k} f(N) f(C) = 0$.

(v) Par le Théorème 15.5 du cours 15 [4], le cosinus de l'angle $\widehat{B'A'C'}$ est

$$\frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{A'B' \times A'C'} = \frac{k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{k\,AB \times k\,AC} = \cos \widehat{BAC},$$

et, comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11 [1]), deux angles de $[0, \pi]$ de même cosinus sont égaux.

Preuve du Corollaire 22.1 (suite). (vi) Si $IM = R$, alors $I'M' = kR$. Réciproquement, si $I'N = kR$, soit $M = f^{-1}(N)$ (Théorème 22.6 (i)) ; alors $f(M) = N$ et $IM = \frac{1}{k} I'N = R$: N est l'image d'un point du premier cercle.

(vii) Soient $\mathcal{D}$ la droite et Γ le cercle, d'images $\mathcal{D}'$ et Γ' par (iii) et (vi). Si $M \in \mathcal{D} \cap \Gamma$, $f(M) \in \mathcal{D}' \cap \Gamma'$. Réciproquement, si $N \in \mathcal{D}' \cap \Gamma'$, $M = f^{-1}(N)$ est sur $\mathcal{D}$ et sur Γ, car N est l'image d'un point de $\mathcal{D}$ et d'un point de Γ, égaux à M par injectivité (Théorème 22.6 (i)). Ainsi f réalise une bijection de $\mathcal{D} \cap \Gamma$ sur $\mathcal{D}' \cap \Gamma'$.

Remarque 22.4 (Aires). Une similitude de rapport k multiplie les aires des triangles par k^2. Soient ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. Par le Corollaire 22.1 (ii) et (iv), $H' \in (B'C')$ et $(A'H') \perp (B'C')$: H' est le pied de la hauteur issue de A'. La base et la hauteur sont multipliées par k (Définition 22.2), et l'aire, moitié de leur produit (formule admise depuis le collège), par k^2.

Théorème 22.7 (Trois Points). Soient A, B, C trois points non alignés. Deux similitudes f et g telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$ sont égales.

Preuve. Les rapports de f et g sont égaux à $\frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{g(A)g(B)}{AB}$ (Remarque 22.2). Alors $\varphi = g^{-1} \circ f$ est une similitude de rapport 1 (Théorèmes 22.4 (ii) et 22.6 (i)), donc une isométrie, qui fixe A, B et C : $\varphi(A) = g^{-1}(g(A)) = A$ (Théorème 20.1 (iii) du cours 20 [5]), etc. Par le Théorème 20.10 (ii), $\varphi = \mathrm{Id}$, et $f = g \circ \varphi = g$ (Théorème 20.1 (i) à (iii)).

22.3 Similitudes Directes et Indirectes

Comme une isométrie, une similitude conserve tous les angles orientés, ou les change tous en leurs opposés : elle est directe ou indirecte, et jamais les deux.

Définition 22.3 (Similitude Directe, Similitude Indirecte). Soit f une similitude de rapport k. Si $A \neq B$, alors $A'B' = k\,AB \neq 0$: l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ est défini dès que $A \neq B$ et $C \neq D$.

(i) f est une *similitude directe* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les angles orientés $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures.

(ii) f est une *similitude indirecte* si, pour tous points $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ sont les opposées de celles de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

Pour $k = 1$, ce sont les définitions du déplacement et de l'antidéplacement (Définition 21.1 du cours 21 [6]).

Théorème 22.8 (Angles et Affixes). Soient f une similitude, A, B, C, D des points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, $q = \dfrac{d-c}{b-a}$ et $q' = \dfrac{d'-c'}{b'-a'}$.

(i) $|q'| = |q|$.

(ii) Les angles $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ ont les mêmes mesures si et seulement si $q' = q$; les mesures du premier sont les opposées de celles du second si et seulement si $q' = \bar{q}$.

Preuve du Théorème 22.8. (i) Par les Théorèmes 12.6 (iii) et 12.7 (ii) du cours 12 [2], $|q'| = \dfrac{C'D'}{A'B'} = \dfrac{k\,CD}{k\,AB} = \dfrac{CD}{AB} = |q|$, où k est le rapport de f.

(ii) La preuve du Théorème 21.1 (ii) et (iii) du cours 21 [6] n'utilise, sur f, que l'égalité $|q'| = |q|$ et le fait que $q' \neq 0$, vrai ici car $C'D' = k\,CD \neq 0$; elle s'applique donc mot pour mot, avec (i).

Lire le théorème. Comme pour une isométrie, on lit la nature d'une similitude sur un seul quotient d'affixes : $q' = q$ pour une similitude directe, $q' = \bar{q}$ pour une similitude indirecte, et cela pour tous les points.

Théorème 22.9 (Classification). Soit f une similitude de rapport k.

(i) Soient Ω un point et $g = h\left(\Omega, \frac{1}{k}\right) \circ f$, l'isométrie du Théorème 22.5 (i). Alors f est une similitude directe si et seulement si g est un déplacement, et une similitude indirecte si et seulement si g est un antidéplacement.

(ii) f est une similitude directe ou une similitude indirecte, et n'est pas les deux.

(iii) Toute homothétie est une similitude directe.

Preuve du Théorème 22.9. (i) Soient $A \neq B$, $C \neq D$, et $A_1 = g(A)$, etc. Comme $f = h(\Omega, k) \circ g$, $A' = h(\Omega, k)(A_1)$, etc., et $d' - c' = k(d_1 - c_1)$, $b' - a' = k(b_1 - a_1)$ (preuve du Théorème 22.2) : le quotient q' formé avec les images par f est égal au quotient q_1 formé avec les images par g. Ainsi $q' = q$ si et seulement si $q_1 = q$, et $q' = \bar{q}$ si et seulement si $q_1 = \bar{q}$; on conclut par les Théorèmes 22.8 (ii) et 21.1 du cours 21 [6].

(ii) Par le Théorème 21.4, g est un déplacement ou un antidéplacement : f est directe ou indirecte par (i). Elle n'est pas les deux : avec $A = C = O$, B et D d'affixes 1 et i, $q = \mathrm{i}$ et $\bar{q} = -\mathrm{i} \neq q$, et l'on ne peut avoir à la fois $q' = q$ et $q' = \bar{q}$ (Théorème 22.8 (ii)).

(iii) Pour $f = h(\Omega, k')$, c'est le Théorème 22.2 (iii).

Théorème 22.10 (Composée et Réciproque). Soient f et g deux similitudes.

(i) Si f et g sont toutes deux directes, ou toutes deux indirectes, $g \circ f$ est une similitude directe.

(ii) Si l'une est directe et l'autre indirecte, $g \circ f$ est une similitude indirecte.

(iii) La réciproque f^{-1} d'une similitude directe est directe ; celle d'une similitude indirecte est indirecte.

Preuve. $g \circ f$ et f^{-1} sont des similitudes (Théorèmes 22.4 (ii) et 22.6 (i)). (i) et (ii) La preuve du Théorème 21.3 (i), (ii) du cours 21 [6] s'applique, avec le Théorème 22.8 (ii) à la place du Théorème 21.1. (iii) Par le Théorème 22.9 (ii), f^{-1} est directe ou indirecte. Si f et f^{-1} étaient de natures différentes, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$ serait indirecte par (ii) ; or $\mathrm{Id} = h(O, 1)$ est directe (Remarque 22.1 et Théorème 22.9 (iii)), et ne peut être les deux (Théorème 22.9 (ii)).

Exemple 22.2 (Natures). Soient Ω un point, $k \neq 0$, θ un réel et $\mathcal{D}$ une droite.
$r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$ est une similitude directe, et $h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}}$ une similitude indirecte (Théorèmes 21.2, 22.9 et 22.10 ; une isométrie est une similitude directe si et seulement si c'est un déplacement, par la Définition 22.3).

22.4 Écritures Complexes

Les similitudes directes sont les applications $z \mapsto az + b$, les similitudes indirectes les applications $z \mapsto a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$; le rapport est $|a|$.

Écriture Complexe d'une Similitude Directe

Théorème 22.11 (Écriture Complexe d'une Similitude Directe). Soient f une application du plan et $k > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une similitude directe de rapport k ;

(ii) il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = k$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = az + b$.

En particulier, toute application d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a \neq 0$, est une similitude directe de rapport $|a|$.

Écriture Complexe d'une Similitude Directe : Preuve

Preuve du Théorème 22.11. (i) $\Rightarrow$ (ii) : par les Théorèmes 22.5 (i) et 22.9 (i), avec $\Omega = O$, $g = h\left(O, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est un déplacement, et $f = h(O, k) \circ g$. Par le Théorème 21.13 du cours 21 [6], g a une écriture complexe $z_1 = a_0 z + b_0$, avec $|a_0| = 1$; par le Théorème 22.1 (i), $h(O, k)$ envoie z_1 sur kz_1. Donc $z' = ka_0 z + kb_0$, et $|ka_0| = k$ (Théorème 12.6 (i), (ii) du cours 12 [2]).

(ii) $\Rightarrow$ (i) : pour tous points M_1, M_2, $z_2' - z_1' = a(z_2 - z_1)$, de module $k|z_2 - z_1|$ (Théorèmes 12.6 (ii) et 12.7 (ii)) : f est une similitude de rapport k. Pour des points $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$, $\frac{z_4' - z_3'}{z_2' - z_1'} = \frac{a(z_4 - z_3)}{a(z_2 - z_1)} = \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$: f est directe (Théorème 22.8 (ii)). Si $a \neq 0$, on applique ce qui précède avec $k = |a| > 0$ (Théorème 12.4 (iii)).

Écriture Complexe d'une Similitude Indirecte

Théorème 22.12 (Écriture Complexe d'une Similitude Indirecte). Soient f une application du plan et $k > 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est une similitude indirecte de rapport k ;

(ii) il existe deux nombres complexes a et b, avec $|a| = k$, tels que f ait pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$.

En particulier, toute application d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $a \neq 0$, est une similitude indirecte de rapport $|a|$.

Écriture Complexe d'une Similitude Indirecte : Preuve

Preuve du Théorème 22.12. (i) $\Rightarrow$ (ii) : comme au Théorème 22.11, $g = h\left(O, \frac{1}{k}\right) \circ f$ est un antidéplacement (Théorème 22.9 (i)), d'écriture complexe $z_1 = a_0\bar{z} + b_0$, avec $|a_0| = 1$ (Théorème 21.14 du cours 21 [6]) ; donc $z' = ka_0\bar{z} + kb_0$, et $|ka_0| = k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : $z_2' - z_1' = a\left(\overline{z_2} - \overline{z_1}\right) = a\,\overline{z_2 - z_1}$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [2]), de module $k\,|z_2 - z_1|$ (Théorème 12.6 (i), (ii)) : f est une similitude de rapport k. Pour $M_1 \neq M_2$ et $M_3 \neq M_4$, $\frac{z_4' - z_3'}{z_2' - z_1'} = \frac{\overline{z_4 - z_3}}{\overline{z_2 - z_1}} = \overline{\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right)}$ (Théorème 12.6 (iii)) : f est indirecte (Théorème 22.8 (ii)). Le dernier point s'en déduit avec $k = |a| > 0$ (Théorème 12.4 (iii)).

Exemple 22.3 (Reconnaître une Similitude).

- $f : z \mapsto z' = (1+\mathrm{i})\,z + 1$. Comme $1+\mathrm{i} \neq 0$, f est une similitude directe (Théorème 22.11), de rapport $|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.
- $g : z \mapsto z' = 2\mathrm{i}\bar{z} + 1$. Comme $2\mathrm{i} \neq 0$, g est une similitude indirecte (Théorème 22.12), de rapport $|2\mathrm{i}| = 2$.
- $z \mapsto z' = -3z + 2$ est une similitude directe de rapport 3 ; c'est l'homothétie de rapport -3 et de centre le point d'affixe $\frac{2}{1-(-3)} = \frac{1}{2}$ (Théorème 22.1 (ii)).

Lire le théorème. Le coefficient a donne tout de suite la nature et le rapport : z ou $\bar{z}$ dit si la similitude est directe ou indirecte, $|a|$ est le rapport. Pour $|a| = 1$, on retrouve les Théorèmes 21.13 et 21.14 du cours 21 [6].

22.5 Deux Points et leurs Images

Un déplacement est déterminé par deux points et leurs images, à condition que les distances soient égales (cours 21 [6]). Pour une similitude directe, ou indirecte, cette condition disparaît : deux points distincts et leurs images distinctes suffisent.

Deux Points et leurs Images

Théorème 22.13 (Deux Points et leurs Images). Soient A, B, C, D quatre points d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D, avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

(i) Il existe une similitude directe f et une seule telle que $f(A) = C$ et $f(B) = D$; son écriture complexe est $z' = az + b$, avec $a = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ et $b = z_C - az_A$.

(ii) Il existe une similitude indirecte g et une seule telle que $g(A) = C$ et $g(B) = D$; son écriture complexe est $z' = a\bar{z} + b$, avec $a = \dfrac{z_D - z_C}{\overline{z_B - z_A}}$ et $b = z_C - a\overline{z_A}$.

Leur rapport est $\dfrac{CD}{AB}$.

Deux Points et leurs Images : Preuve

Preuve du Théorème 22.13. (i) Par le Théorème 22.11, une similitude directe a une écriture $z' = az + b$, $a \neq 0$; elle envoie A sur C et B sur D si et seulement si $az_A + b = z_C$ et $az_B + b = z_D$. Par soustraction, $a(z_B - z_A) = z_D - z_C$, d'où la seule valeur possible de a, puis de b ; réciproquement, ces valeurs vérifient les deux égalités, et $a \neq 0$ car $z_D \neq z_C$: l'application d'écriture $z' = az + b$ est une similitude directe (Théorème 22.11). Deux applications qui ont la même écriture complexe sont égales. (ii) De même avec le Théorème 22.12, en remplaçant z_A, z_B par $\overline{z_A}$, $\overline{z_B}$, avec $\overline{z_B} - \overline{z_A} = \overline{z_B - z_A} \neq 0$ (Théorème 12.4 (i), (iii) du cours 12 [2]). Le rapport est $|a| = \frac{CD}{AB}$ dans les deux cas (Théorèmes 12.6 (i), (iii) et 12.7 (ii)).

Deux Points et leurs Images : Exemple

Exemple 22.4 (Deux Similitudes). Soient $A(2,1)$, $B(4,2)$, $C(2,3)$, $D(5,7)$, d'affixes $2+\mathrm{i}$, $4+2\mathrm{i}$, $2+3\mathrm{i}$, $5+7\mathrm{i}$.

- **Similitude directe.** $a = \dfrac{(5+7\mathrm{i})-(2+3\mathrm{i})}{(4+2\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})} = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5} = 2+\mathrm{i}$ et $b = 2+3\mathrm{i}-(2+\mathrm{i})(2+\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}$: $z' = (2+\mathrm{i})z-1-\mathrm{i}$.
- **Similitude indirecte.** $a = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{\overline{2+\mathrm{i}}} = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5} = \dfrac{2+11\mathrm{i}}{5}$ et $b = 2+3\mathrm{i}-\dfrac{2+11\mathrm{i}}{5}(2-\mathrm{i}) = 2+3\mathrm{i}-(3+4\mathrm{i}) = -1-\mathrm{i}$: $z' = \dfrac{2+11\mathrm{i}}{5}\bar{z}-1-\mathrm{i}$.
- **Rapport.** Dans les deux cas, $|a| = \dfrac{|3+4\mathrm{i}|}{|2+\mathrm{i}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} = \dfrac{CD}{AB}$.

Il y a donc exactement deux similitudes qui envoient A sur C et B sur D : toute similitude est directe ou indirecte, et pas les deux (Théorème 22.9 (ii)), et il y en a une seule de chaque sorte (Théorème 22.13).

22.6 Similitudes Directes

Une similitude directe fait tourner tous les vecteurs du même angle et les multiplie par son rapport. Si ce n'est pas une translation, elle a un centre, et c'est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

Angle d'une Similitude Directe

Théorème 22.14 (Angle d'une Similitude Directe). Soit f une similitude directe de rapport k, d'écriture complexe $z' = az + b$ (Théorème 22.11).

(i) Pour tous points M_1, M_2, $z_2' - z_1' = a(z_2 - z_1)$; en particulier, a ne dépend que de f.

(ii) Il existe un réel θ tel que, pour tous points $M_1 \neq M_2$, θ soit une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1'M_2'}\right)$; les réels qui conviennent sont les réels égaux à θ modulo 2π, et $a = ke^{i\theta}$.

Définition 22.4 (Angle d'une Similitude Directe). Un tel réel θ est appelé une mesure de l'*angle de la similitude directe* f ; on dit que f est une similitude directe d'angle θ. L'angle est défini à 2π près. Pour $k = 1$, c'est l'angle du déplacement f (Définition 21.2 du cours 21 [6]).

Angle d'une Similitude Directe : Preuve

Preuve du Théorème 22.14. (i) $z_2' - z_1' = (az_2 + b) - (az_1 + b)$; donc $a = \frac{z_2' - z_1'}{z_2 - z_1}$ pour deux points distincts quelconques. (ii) Par le Théorème 12.15 du cours 12 [2], les mesures de $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1'M_2'}\right)$ sont les arguments de $\frac{z_2' - z_1'}{z_2 - z_1} = a$, qui ne dépendent pas des points. Si θ est l'un d'eux, ce sont les réels égaux à θ modulo 2π (Définition 12.6), et $a = |a|\, e^{i\theta} = ke^{i\theta}$ (Théorème 12.10 (i)).

Théorème 22.15 (Angle d'une Composée, d'une Réciproque). Soient f et g deux similitudes directes, de rapports k et k' et d'angles θ et θ'.

(i) $g \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

(ii) f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

Preuve. Ce sont des similitudes directes (Théorème 22.10), de rapports kk' et $\frac{1}{k}$ (Théorèmes 22.4 (ii) et 22.6 (i)). Soient $M_1 \neq M_2$. (i) Par le Théorème 22.14, $z_2' - z_1' = ke^{i\theta}(z_2 - z_1)$, puis, pour les images de M_1' et M_2' par g, $z_2'' - z_1'' = k'e^{i\theta'}(z_2' - z_1') = kk'e^{i(\theta+\theta')}(z_2 - z_1)$ (Théorème 12.13 (i) du cours 12 [2]) : le coefficient de $g \circ f$ est $kk'e^{i(\theta+\theta')}$, dont $\theta + \theta'$ est un argument (Théorème 12.10 (ii)). (ii) Si $N_1 = f^{-1}(M_1)$ et $N_2 = f^{-1}(M_2)$, d'affixes w_1, w_2, alors $z_2 - z_1 = ke^{i\theta}(w_2 - w_1)$, donc $w_2 - w_1 = \frac{1}{k}e^{-i\theta}(z_2 - z_1)$ (Théorème 12.13 (ii)) : $-\theta$ est un argument du coefficient de f^{-1}.

Théorème 22.16 (Centre et Forme Réduite). Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ, d'écriture complexe $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$.

(i) $a = 1$ si et seulement si $k = 1$ et $\theta = 0\ [2\pi]$; f est alors la translation de vecteur d'affixe b.

(ii) Si $a \neq 1$, f a un point invariant Ω et un seul, d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$, et $z' - \omega = a(z - \omega)$.

(iii) Dans ce cas, $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta) = r(\Omega, \theta) \circ h(\Omega, k)$.

Définition 22.5 (Éléments Caractéristiques). Si $a \neq 1$, le point Ω est le *centre* de f ; le centre, le rapport k et l'angle θ sont ses *éléments caractéristiques*, et l'on dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ ; on verra qu'il n'y en a qu'une (Théorème 22.17 (i)). L'écriture $f = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ est sa *forme réduite*.

Preuve du Théorème 22.16. (i) Par le Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2], $ke^{i\theta} = 1 \times e^{i0}$ si et seulement si $k = 1$ et $\theta = 0 \ [2\pi]$. Alors $z' = z + b$, et l'on conclut par le Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5].

(ii) Un point d'affixe z est invariant si et seulement si $z = az + b$, soit $(1 - a)\, z = b$, soit $z = \omega$. Comme $\omega = a\omega + b$, on obtient, en soustrayant, $z' - \omega = a\,(z - \omega)$.

(iii) Par le Théorème 20.4 (ii), $r\,(\Omega, \theta)$ envoie z sur z_1 tel que $z_1 - \omega = e^{i\theta}\,(z - \omega)$, puis $h\,(\Omega, k)$ envoie z_1 sur z' tel que $z' - \omega = k\,(z_1 - \omega) = ke^{i\theta}\,(z - \omega)$ (Théorème 22.1 (i)). Dans l'autre ordre, on trouve $e^{i\theta} \times k\,(z - \omega)$, le même nombre. Les trois applications ont la même écriture complexe, par (ii) : elles sont égales.

Lire le théorème. Une similitude directe qui n'est pas une translation tourne autour de son centre de l'angle θ et agrandit, ou réduit, à partir de ce centre, dans le rapport k ; l'ordre des deux opérations est indifférent.

Centre, Rapport et Angle donnés

Théorème 22.17 (Centre, Rapport et Angle donnés). Soient Ω un point d'affixe ω, $k > 0$ et θ un réel, avec $k \neq 1$ ou $\theta \neq 0 \ [2\pi]$.

(i) $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ est la seule similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

(ii) Une application du plan f est cette similitude si et seulement si $f(\Omega) = \Omega$ et, pour tout point $M \neq \Omega$, $\Omega M' = k\,\Omega M$ et θ est une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.

Preuve du Théorème 22.17. Posons $a = ke^{i\theta}$; $a \neq 1$ par le Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2]. (i) Par la preuve du Théorème 22.16 (iii), $s = h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ a pour écriture $z' - \omega = a(z - \omega)$, soit $z' = az + (1 - a)\omega$: c'est une similitude directe de rapport $|a| = k$ (Théorème 22.11), d'angle θ (Théorème 22.14 (ii) et Théorème 12.10 (ii)), et de centre Ω (Théorème 22.16 (ii)). Si f est une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, son écriture est $z' = az + b$ (Théorème 22.14 (ii)), et $f(\Omega) = \Omega$ donne $b = (1 - a)\omega$: $f = s$.

(ii) Si $f = s$, f fixe Ω ; pour $M \neq \Omega$, $\Omega M' = k\,\Omega M$ (Définition 22.2) et le Théorème 22.14 (ii), avec $M_1 = \Omega$ et $M_2 = M$, donne la mesure θ. Réciproquement, pour $M \neq \Omega$, le nombre $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module $\frac{\Omega M'}{\Omega M} = k$ et pour argument θ (Théorèmes 12.6 (iii), 12.7 (ii) et 12.15) : il vaut $ke^{i\theta}$ (Théorème 12.10 (i)). Ainsi $z' - \omega = a(z - \omega)$ pour tout M, y compris $M = \Omega$: f a l'écriture de s, donc $f = s$.

Exemple 22.5 (Éléments d'une Similitude Directe). Soit $f : z \mapsto z' = (1+\mathrm{i})\,z + 1$ (Exemple 22.3).

- **Rapport et angle.** $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$: f est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (Théorème 22.14 (ii) et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [2]).
- **Centre.** Comme $1+\mathrm{i} \neq 1$, son centre Ω a pour affixe $\omega = \dfrac{1}{1-(1+\mathrm{i})} = \dfrac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ (Théorème 22.16 (ii)).
- **Forme réduite.** $f = h\left(\Omega, \sqrt{2}\right) \circ r\left(\Omega, \frac{\pi}{4}\right)$ (Théorème 22.16 (iii)).
- **Vérification.** L'image de O a pour affixe 1 ; $\frac{1-\mathrm{i}}{0-\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{1} = 1+\mathrm{i}$: $\Omega O' = \sqrt{2}\,\Omega O$, et $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}\right)$, comme le dit le Théorème 22.17 (ii).

22.7 Similitudes Indirectes

Une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ a un centre et un axe : c'est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une symétrie orthogonale dont l'axe passe par ce centre. Pour $k = 1$, c'est un antidéplacement.

Centre d'une Similitude Indirecte

Théorème 22.18 (Centre d'une Similitude Indirecte). Soit f une similitude indirecte de rapport k, d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec $|a| = k$ (Théorème 22.12).

(i) $f \circ f$ a pour écriture complexe $z'' = k^2 z + a\bar{b} + b$.

(ii) Si $k \neq 1$, f a un point invariant Ω et un seul, appelé le *centre* de f, d'affixe $\omega = \dfrac{a\bar{b} + b}{1 - k^2}$, et $f \circ f = h\left(\Omega, k^2\right)$.

(iii) Si $k = 1$, f est un antidéplacement : une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante (Théorème 21.16 du cours 21 [6]).

Centre d'une Similitude Indirecte : Preuve

Preuve du Théorème 22.18. (i) $f\left(f\left(M\right)\right)$ a pour affixe $a\,\overline{a\bar{z}+b}+b=a\bar{a}z+a\bar{b}+b=k^2z+a\bar{b}+b$ (Théorème 12.4 (i), (iii) du cours 12 [2]).

(ii) Si $z=a\bar{z}+b$, alors $\bar{z}=\bar{a}z+\bar{b}$ (Théorème 12.4 (i)), et $z=a\left(\bar{a}z+\bar{b}\right)+b=k^2z+a\bar{b}+b$: nécessairement $z=\omega$. Réciproquement, $\bar{\omega}=\frac{\bar{a}b+\bar{b}}{1-k^2}$, car $1-k^2$ est réel, et $a\bar{\omega}+b=\frac{k^2b+a\bar{b}+\left(1-k^2\right)b}{1-k^2}=\omega$: Ω est invariant. Par (i) et le Théorème 22.1 (ii), $f\circ f$ est l'homothétie de rapport $k^2\neq 1$ et de centre d'affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-k^2}=\omega$. (iii) C'est la Définition 22.3 pour $k=1$.

Théorème 22.19 (Forme Réduite et Axe). Soit f une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$, de centre Ω d'affixe ω, d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$. Soient α un réel tel que $a = ke^{2i\alpha}$, et $\mathcal{D}$ la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{i\alpha}$.

(i) $f = h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}} = S_{\mathcal{D}} \circ h(\Omega, k)$.

(ii) $\mathcal{D}$ est la seule droite Δ telle que $f = h(\Omega, k) \circ S_{\Delta}$; c'est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

(iii) $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$, et $f\left(\mathcal{D}^{\perp}\right) = \mathcal{D}^{\perp}$, où $\mathcal{D}^{\perp}$ est la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en Ω.

Un tel réel α existe : $\frac{a}{k}$ est de module 1, il s'écrit $e^{i\varphi}$ (Théorème 12.9 (ii) du cours 12 [2]), et $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ convient, car $ke^{2i\alpha} = ke^{i\varphi} = a$.

Preuve du Théorème 22.19. (i) Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur z_1 tel que $z_1 - \omega = e^{2i\alpha}\,\overline{z-\omega}$; puis $h(\Omega, k)$ envoie z_1 sur z' tel que $z' - \omega = k(z_1 - \omega) = a(\bar{z} - \bar{\omega})$ (Théorème 22.1 (i) et Théorème 12.4 (i) du cours 12 [2]). Comme $\omega = a\bar{\omega} + b$ (Théorème 22.18 (ii)), $z' = a\bar{z} + b$: c'est l'écriture de f. Dans l'autre ordre, $z' - \omega = e^{2i\alpha}\,\overline{k(z-\omega)} = ke^{2i\alpha}\,\overline{z-\omega}$, car $\bar{k} = k$ (Théorème 12.4 (i), (ii)) : la même écriture.

(ii) Si $f = h(\Omega, k) \circ S_\Delta$, alors $h(\Omega, k) \circ S_\Delta = h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}}$, donc $S_\Delta = S_{\mathcal{D}}$ (Théorèmes 22.2 (iv) et 20.1 (vi)), et $\Delta = \mathcal{D}$, ensemble des points invariants de cette symétrie (Théorème 20.16 (ii)). Soit $M_1 = S_{\mathcal{D}}(M)$; alors $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$ (Définition 22.1). Comme $k \neq 0$, $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M_1} = \overrightarrow{\Omega M}$, c'est-à-dire $M_1 = M$ (Théorème 14.1 (i) du cours 14 [3]), c'est-à-dire $M \in \mathcal{D}$.

Preuve du Théorème 22.19 (suite). (iii) Les points de $\mathcal{D}$ ont pour affixes $\omega + te^{\mathrm{i}\alpha}$, et ceux de $\mathcal{D}^{\perp}$ les nombres $\omega + t\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}$, t réel (Définition 14.6 du cours 14 [3], Théorèmes 12.7 (i) et 20.3 (i) : $\mathrm{Re}\left(e^{\mathrm{i}\alpha}\,\overline{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}}\right) = \mathrm{Re}\,(-\mathrm{i}) = 0$). Par la preuve de (i), $z' - \omega = ke^{2\mathrm{i}\alpha}\,\overline{z-\omega}$; comme $\overline{e^{\mathrm{i}\alpha}} = e^{-\mathrm{i}\alpha}$ et $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$ (Théorème 12.13 (ii) et Définition 12.2), f envoie $\omega + te^{\mathrm{i}\alpha}$ sur $\omega + kte^{\mathrm{i}\alpha}$, et $\omega + t\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}$ sur $\omega - kt\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}$. Quand t décrit $\mathbb{R}$, kt et $-kt$ décrivent $\mathbb{R}$: $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ et $f\left(\mathcal{D}^{\perp}\right) = \mathcal{D}^{\perp}$.

Définition 22.6 (Axe, Forme Réduite). La droite $\mathcal{D}$ du Théorème 22.19 est l'*axe* de f ; elle ne dépend pas du réel α choisi, car c'est la seule droite Δ telle que $f = h(\Omega, k) \circ S_\Delta$ (Théorème 22.19 (ii)) ; l'écriture $f = h(\Omega, k) \circ S_\mathcal{D}$ est sa *forme réduite*. Le centre, le rapport et l'axe sont les *éléments caractéristiques* de f.

Théorème 22.20 (Centre, Rapport et Axe donnés). Soient Ω un point, $k > 0$ un réel, $k \neq 1$, et Δ une droite passant par Ω. Alors $h(\Omega, k) \circ S_\Delta$ est la seule similitude indirecte de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ.

Preuve du Théorème 22.20. S_Δ est un antidéplacement (Théorème 21.2 (ii) du cours 21 [6]), c'est-à-dire une similitude indirecte de rapport 1 (Définition 22.3), et $h(\Omega, k)$ est une similitude directe de rapport k (Théorèmes 22.9 (iii) et 22.4 (i)) : $g = h(\Omega, k) \circ S_\Delta$ est une similitude indirecte (Théorème 22.10 (ii)) de rapport k (Théorème 22.4 (ii)). Elle fixe Ω, qui est sur Δ (Théorème 20.16 (ii) du cours 20 [5]) : son centre est Ω (Théorème 22.18 (ii)), et son axe est Δ, seule droite telle que $g = h(\Omega, k) \circ S_\Delta$ (Théorème 22.19 (ii) et Définition 22.6). Enfin, une similitude indirecte f de centre Ω, de rapport k et d'axe Δ vérifie $f = h(\Omega, k) \circ S_\Delta = g$ (Théorème 22.19 (i) et Définition 22.6).

Remarque 22.5 (Pourquoi un Rapport Positif). Dans la forme réduite, l'homothétie a le rapport $k > 0$. Avec le rapport $-k$, l'axe serait remplacé par $\mathcal{D}^\perp$: $f = h(\Omega, -k) \circ S_{\mathcal{D}^\perp}$. En effet, $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}^\perp} = S_\Omega$ (Corollaire 20.2 du cours 20 [5]), donc $S_\Omega \circ S_{\mathcal{D}^\perp} = S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}^\perp} \circ S_{\mathcal{D}^\perp} = S_{\mathcal{D}}$ (Théorèmes 20.5 (iii) et 20.1 (i), (ii)) ; et $h(\Omega, -k) = h(\Omega, k) \circ S_\Omega$ (Théorème 22.3 (i) et Remarque 22.1). Ainsi $h(\Omega, -k) \circ S_{\mathcal{D}^\perp} = h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}} = f$.

Lire les théorèmes. Une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ agrandit, ou réduit, dans le rapport k à partir de son centre, et retourne le plan autour de son axe. Appliquée deux fois, elle ne retourne plus rien : $f \circ f$ est l'homothétie de rapport k^2.

Exemple 22.6 (Éléments d'une Similitude Indirecte). Soit $g : z \mapsto z' = 2\mathrm{i}\bar{z} + 1$ (Exemple 22.3), similitude indirecte de rapport $k = 2$.

- **Centre.** $a\bar{b} + b = 2\mathrm{i} \times 1 + 1 = 1 + 2\mathrm{i}$ et $1 - k^2 = -3$: le centre Ω a pour affixe $\omega = -\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3}$ (Théorème 22.18 (ii)), soit $\Omega\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.
- **Axe.** $2\mathrm{i} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 2e^{2\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$: $\alpha = \frac{\pi}{4}$, et l'axe est la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$, de coordonnées proportionnelles à $(1, 1)$: son équation est $y = x - \frac{1}{3}$ (Théorème 22.19).
- **Forme réduite.** $g = h(\Omega, 2) \circ S_{\mathcal{D}}$, et $g \circ g = h(\Omega, 4)$: son écriture est $z'' = 4z + 1 + 2\mathrm{i}$ (Théorème 22.18).
- **Vérification.** $\bar{\omega} = -\frac{1-2\mathrm{i}}{3}$ et $2\mathrm{i}\bar{\omega} + 1 = -\frac{2\mathrm{i}+4}{3} + 1 = -\frac{1+2\mathrm{i}}{3} = \omega$: Ω est bien invariant.

Conclusion

On retient la décomposition d'une similitude en une homothétie et une isométrie, la séparation en similitudes directes et indirectes, les écritures complexes $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$ avec $a \neq 0$, et les formes réduites.

À retenir

Ce que cette leçon a établi.

- $h(\Omega, k) : \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, $z' - \omega = k(z - \omega)$; elle multiplie les vecteurs par k et conserve les angles orientés ; deux homothéties se composent en une homothétie, ou en une translation si $kk' = 1$ (Théorèmes 22.1 à 22.3).
- Une similitude de rapport k multiplie les distances par k ; elle s'écrit $h(\Omega, k) \circ g$, g isométrie ; elle est bijective et conserve milieux, alignement, parallélisme, orthogonalité et angles géométriques ; elle multiplie les longueurs par k et les aires par k^2 (Théorèmes 22.5 et 22.6, Corollaire 22.1, Remarque 22.4).
- Toute similitude est directe (elle conserve les angles orientés) ou indirecte (elle les change en leurs opposés), et jamais les deux (Théorème 22.9).
- Directe : $z' = az + b$; indirecte : $z' = a\bar{z} + b$; $a \neq 0$, rapport $|a|$ (Théorèmes 22.11 et 22.12). Si $A \neq B$ et $C \neq D$, une seule similitude directe et une seule indirecte envoient A sur C et B sur D (Théorème 22.13).
- Directe, $a = ke^{i\theta} \neq 1$: centre d'affixe $\frac{b}{1-a}$, forme réduite $h(\Omega, k) \circ r(\Omega, \theta)$ (Théorèmes 22.14 à 22.17).
- Indirecte, $k \neq 1$: centre d'affixe $\frac{a\bar{b}+b}{1-k^2}$, $f \circ f = h\left(\Omega, k^2\right)$, forme réduite $h(\Omega, k) \circ S_{\mathcal{D}}$ (Théorèmes 22.18 à 22.20).

Merci pour votre attention.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray.
Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat.
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[7] H. Smida, M. Sakrani, T. Charrada, R. Bouida, M. El Arbi, K. Kaâniche Ben Messaoud et N. Mziou.
Mathématiques, 4e année de l'enseignement secondaire tunisien, tome 2.
Centre National Pédagogique, 2023.