Exercices type Bac & Solutions : Les suites numériques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 1.1 du cours 1* désigne un énoncé numéroté du cours 1 [1]. Les renvois *cours 5* et *cours 11* désignent les cours correspondants [2, 3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition et propriétés d'une suite **1**
1.1 Suites croissantes et décroissantes 1
1.2 Suites bornées 2

2 Suites arithmétiques **3**
2.1 Définition d'une suite arithmétique 3
2.2 Somme des termes d'une suite arithmétique 3

3 Suites géométriques **4**
3.1 Définition d'une suite géométrique 4
3.2 Somme des termes d'une suite géométrique 5

4 Limites des suites **6**
4.1 Limites des suites géométriques 6
4.2 Théorème des gendarmes 7
4.3 Limite des suites monotones et bornées 7

5 Raisonnement par récurrence **10**

1 Définition et propriétés d'une suite

1.1 Suites croissantes et décroissantes

Exercice 1 *Soit (u_n) une suite définie par $u_n = 3n + 2$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.*

Solution 1 *Pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1)+2) - (3n+2) = 3 > 0,$$

donc (u_n) est strictement croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

Exercice 2 *Soit (v_n) une suite définie par $v_n = \frac{2}{n+1}$. Montrer que (v_n) est strictement décroissante.*

Solution 2 *Pour tout entier naturel n,*

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n+2-2n-4}{(n+1)(n+2)} = -\frac{2}{(n+1)(n+2)} < 0,$$

donc (v_n) est strictement décroissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

Exercice 3 *Soit (w_n) une suite définie par*

$$w_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Montrer que (w_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Solution 3 *On calcule les premiers termes : $w_0 = 0$, $w_1 = -\frac{1}{2}$ et $w_2 = \frac{2}{3}$. Comme $w_1 < w_0$, la suite (w_n) n'est pas croissante ; comme $w_2 > w_1$, elle n'est pas décroissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).*

1.2 Suites bornées

Exercice 4 *Soit (x_n) une suite définie par $x_n = \sin(n)$. Montrer que (x_n) est bornée.*

Solution 4 *Pour tout entier naturel n,*

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1$$

(cours 11 [3]), donc (x_n) est bornée (Définition 1.3 du cours 1 [1]).

Exercice 5 *Soit (y_n) une suite définie par*

$$y_n = \frac{n}{n^2+1}, \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

Montrer que (y_n) est bornée.

Solution 5 *Pour tout entier naturel $n \geq 1$,*

$$0 < y_n < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq 1,$$

donc (y_n) est bornée (Définition 1.3 du cours 1 [1]).

Exercice 6 *Soit (z_n) une suite définie par*

$$z_n = \ln(n), \quad \textit{pour tout } n \geq 1.$$

Montrer que (z_n) n'est pas bornée.

Solution 6 *Comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ (cours 5 [2]), on a $\lim_{n\to+\infty} z_n = +\infty$ (Théorème 1.7 du cours 1 [1]). Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée (Remarque 1.2 du cours 1 [1]) ; donc (z_n) n'est pas bornée.*

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition d'une suite arithmétique

Exercice 7 *Soit (a_n) une suite arithmétique de raison $r = 5$. Si $a_3 = 16$, trouver a_1.*

Solution 7 *Comme (a_n) est une suite arithmétique, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$a_n = a_1 + (n-1)\, r$$

(Théorème 1.1 du cours 1 [1]), donc

$$a_1 = a_n - (n-1)\, r.$$

D'où $a_1 = a_3 - 2r = 16 - 2 \cdot 5 = 6$.

Exercice 8 *Soit (b_n) une suite arithmétique. On sait que $b_5 - b_2 = 9$. Trouver la raison de la suite.*

Solution 8 *Comme (b_n) est une suite arithmétique de raison r, pour tous entiers n et p,*

$$b_n = b_p + (n-p)\, r$$

(Théorème 1.1 du cours 1 [1]). Pour $n \neq p$, on en déduit

$$r = \frac{b_n - b_p}{n-p}.$$

D'où $r = \frac{b_5 - b_2}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$.

Exercice 9 *Soit (c_n) une suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $c_1 = 20$. Trouver le terme c_{10}.*

Solution 9 *Comme (c_n) est une suite arithmétique, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$c_n = c_1 + (n-1)\, r$$

(Théorème 1.1 du cours 1 [1]). D'où $c_{10} = c_1 + 9r = 20 + 9(-4) = 20 - 36 = -16$.

2.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

Exercice 10 *Calculer la somme des 50 premiers termes de la suite arithmétique (d_n) si $d_1 = 7$ et $d_{50} = 204$.*

Solution 10 *Rappelons la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique (Théorème 1.3 du cours 1 [1]) :*

$$\begin{aligned} S_n &= d_1 + d_2 + \ldots + d_n \\ &= (\text{nb termes}) \frac{\textit{premier terme + dernier terme}}{2} \\ &= n \frac{d_1 + d_n}{2}. \end{aligned}$$

Alors $S_{50} = \frac{50}{2}(d_1 + d_{50}) = \frac{50}{2}(7 + 204) = 25 \cdot 211 = 5275$.

Exercice 11 *Trouver la somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique (e_n) de raison $r = 6$ et de premier terme $e_1 = 3$.*

Solution 11 *La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante (Théorème 1.3 du cours 1 [1]) :*

$$S_n = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = n\frac{e_1 + e_n}{2}.$$

Comme $e_{100} = e_1 + 99r$ (Théorème 1.1 du cours 1 [1]), on a $S_{100} = \frac{100}{2}(2e_1 + 99r) = 50(6 + 99 \cdot 6) = 50 \cdot 600 = 30000$.

Exercice 12 *Une suite arithmétique (f_n) a pour premier terme $f_1 = -5$ et pour raison $r = 2$. Calculer la somme des termes de f_1 à f_{20}.*

Solution 12 *La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante (Théorème 1.3 du cours 1 [1]) :*

$$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n = n\frac{f_1 + f_n}{2}.$$

Comme $f_{20} = f_1 + 19r = -5 + 19 \cdot 2 = 33$, on a $S_{20} = \frac{20}{2}(f_1 + f_{20}) = 10(-5 + 33) = 10 \cdot 28 = 280$.

3 Suites géométriques

3.1 Définition d'une suite géométrique

Exercice 13 *Soit (g_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $g_1 = 27$. Trouver g_4.*

Solution 13 *Comme (g_n) est une suite géométrique, on a*

$$g_n = q^{n-1}g_1, \quad \forall n \geq 1$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). D'où $g_4 = g_1 \cdot q^3 = 27 \cdot (\frac{1}{3})^3 = 27 \cdot \frac{1}{27} = 1$.

Exercice 14 *Soit (h_n) une suite géométrique telle que $h_2 = 12$ et $h_5 = \frac{3}{2}$. Trouver la raison q.*

Solution 14 *Comme (h_n) est une suite géométrique, pour tous entiers $n \geq p \geq 1$,*

$$h_n = q^{n-p}h_p$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Donc, si $h_p \neq 0$,

$$q^{n-p} = \frac{h_n}{h_p}.$$

En particulier, $q^3 = \frac{h_5}{h_2}$, d'où $q = \sqrt[3]{\frac{h_5}{h_2}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{2}}{12}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 15 *Soit (i_n) une suite géométrique de raison $q = 2$. Si $i_3 = 8$, trouver i_1.*

Solution 15 *Comme (i_n) est une suite géométrique, on a*

$$i_n = q^{n-1} i_1, \quad \forall n \geq 1$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Donc

$$i_1 = \frac{i_n}{q^{n-1}}.$$

D'où $i_1 = \frac{i_3}{q^2} = \frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$.

3.2 Somme des termes d'une suite géométrique

Exercice 16 *Calculer la somme des 5 premiers termes de la suite géométrique (j_n) si $j_1 = 1$ et $q = 2$.*

Solution 16 *Rappelons la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ (Théorème 1.5 du cours 1 [1]) :*

$$\begin{aligned} S_n &= j_1 + j_2 + \ldots + j_n \\ &= (\textit{premier terme}) \frac{1 - q^{\textit{nombre de termes}}}{1 - q} \\ &= j_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}. \end{aligned}$$

D'où $S_5 = \frac{j_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{1(1-2^5)}{1-2} = \frac{1-32}{-1} = 31$.

Exercice 17 *Trouver la somme des 10 premiers termes de la suite géométrique (k_n) de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $k_1 = 81$.*

Solution 17 *Comme (k_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a (Théorème 1.5 du cours 1 [1])*

$$S_n = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

D'où $S_{10} = \frac{k_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{81(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{81(1-\frac{1}{59049})}{\frac{2}{3}} = \frac{243}{2}(1 - \frac{1}{59049}) = \frac{29524}{243}$.

Exercice 18 *Une suite géométrique (l_n) a pour premier terme $l_1 = 7$ et pour raison $q = -2$. Calculer la somme des termes de l_1 à l_6.*

Solution 18 *Comme (l_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a (Théorème 1.5 du cours 1 [1])*

$$S_n = l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

D'où $S_6 = \frac{l_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{7(1-(-2)^6)}{1-(-2)} = \frac{7(1-64)}{3} = \frac{7\cdot(-63)}{3} = -147$.

4 Limites des suites

4.1 Limites des suites géométriques

Exercice 19 *Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_0. Montrer que (v_n) converge vers 0.*

Solution 19 *Comme (v_n) est une suite géométrique, pour tout entier n,*

$$v_n = q^n v_0$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Puisque $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (Théorème 1.11 du cours 1 [1]). Donc la suite (v_n) converge vers $v_0 \times 0 = 0$ (Théorème 1.6 du cours 1 [1]).

Exercice 20 *Soit (a_n) une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme a_0. Montrer que (a_n) converge vers 0.*

Solution 20 *Comme (a_n) est une suite géométrique, pour tout entier n,*

$$a_n = q^n a_0$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Puisque $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ (Théorème 1.11 du cours 1 [1]). Donc la suite (a_n) converge vers $a_0 \times 0 = 0$ (Théorème 1.6 du cours 1 [1]).

Exercice 21 *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Solution 21 *Comme (u_n) est une suite géométrique, pour tout entier n,*

$$u_n = q^n u_0$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Puisque $q > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$ (Théorème 1.11 du cours 1 [1]). Comme $u_0 > 0$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (Corollaire 1.1 du cours 1 [1]).

Exercice 22 *Soit (w_n) une suite géométrique de raison $q = -1$ et de premier terme w_0. Discuter la convergence de (w_n).*

Solution 22 *Comme (w_n) est une suite géométrique, pour tout entier n,*

$$w_n = q^n w_0 = (-1)^n w_0$$

(Théorème 1.4 du cours 1 [1]). Si $w_0 \neq 0$, la suite (w_n) prend alternativement les valeurs w_0 et $-w_0$, qui sont distinctes ; elle n'a donc pas de limite (Corollaire 1.1 du cours 1 [1], cas $q \leq -1$) : (w_n) est divergente. Si $w_0 = 0$, la suite est nulle, donc convergente vers 0.

4.2 Théorème des gendarmes

Exercice 23 *Soit (u_n) une suite telle que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Solution 23 *Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (Théorème 1.7 du cours 1 [1]) et que (u_n) est encadrée entre 0 et $\frac{1}{n}$, par le théorème des gendarmes (Théorème 1.8 du cours 1), $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Exercice 24 *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = \frac{\sin(n)+n}{n^2}$ et soit (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par $v_n = \frac{n+1}{n^2}$. On considère également la suite (w_n) telle que pour tout $n \geq 1$, $w_n = \frac{n-1}{n^2}$.*

1. *Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $w_n \leq u_n \leq v_n$.*
2. *Utiliser le théorème des gendarmes pour déterminer la limite de la suite (u_n).*

Solution 24

1. *Pour tout $n \geq 1$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ (cours 11 [3]). Ainsi, $-1 + n \leq \sin(n) + n \leq 1 + n$. En divisant par n^2, on obtient $\frac{n-1}{n^2} \leq \frac{\sin(n)+n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$. Donc $w_n \leq u_n \leq v_n$.*
2. *Puisque $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, on a $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ (Théorèmes 1.6 et 1.7 du cours 1 [1]) ; et comme $w_n \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$, le théorème des gendarmes (Théorème 1.8 du cours 1) nous permet de conclure que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Exercice 25 *Soit (t_n) une suite telle que $-1 \leq t_n \leq 1$ pour tout n. Peut-on appliquer le théorème des gendarmes à cet encadrement pour conclure sur la convergence de (t_n) ?*

Solution 25 *Le théorème des gendarmes (Théorème 1.8 du cours 1 [1]) demande que les deux suites qui encadrent (t_n) aient la même limite. Ici, elles sont constantes, de limites -1 et 1, qui sont différentes. Par conséquent, on ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes pour conclure sur la convergence de (t_n). L'encadrement montre seulement que (t_n) est bornée ; par exemple, $t_n = (-1)^n$ vérifie cet encadrement et diverge, tandis que $t_n = 0$ le vérifie et converge.*

4.3 Limite des suites monotones et bornées

Exercice 26 *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$.*

1. *Montrer que la suite (u_n) est croissante.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est majorée.*
3. *En déduire que (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.*

Solution 26 *1. Pour tout entier naturel n, on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+2} - \frac{2n+3}{n+2} \\ &= \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} \\ &= \frac{(2n+5)(n+2) - (2n+3)(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

Donc, (u_n) est croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

2. Pour tout entier naturel n, on a

$$2n+3 \leq 2n+4.$$

En divisant par $n+2 > 0$, on obtient

$$\frac{2n+3}{n+2} \leq 2.$$

Donc $u_n \leq 2$. La suite (u_n) est majorée par 2.

3. Comme la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]). En divisant numérateur et dénominateur par $n \geq 1$, on obtient sa limite (Théorème 1.6 du cours 1 [1]) :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 2.$$

Exercice 27 *Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{3n}{2n+1}$.*

1. *Montrer que la suite (v_n) est croissante.*
2. *Montrer que la suite (v_n) est majorée.*
3. *En déduire que (v_n) est convergente, et déterminer sa limite.*

Solution 27 *1. Pour tout entier naturel n, on a*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} - \frac{3n}{2n+1} \\ &= \frac{3n+3}{2n+3} - \frac{3n}{2n+1} \\ &= \frac{(3n+3)(2n+1) - 3n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} \\ &= \frac{3}{(2n+3)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Donc, (v_n) est croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

2. *Pour tout entier naturel n, on a $3n < 3n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(2n+1)$. En divisant par $2n+1 > 0$, on obtient*

$$v_n = \frac{3n}{2n+1} < \frac{3}{2}.$$

La suite est majorée par $\frac{3}{2}$.

3. *Comme la suite (v_n) est croissante et majorée, elle est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]). En divisant numérateur et dénominateur par $n \geq 1$, on obtient sa limite (Théorème 1.6 du cours 1 [1]) :*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 28 *Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $w_n = \frac{4^n - n}{4^n + n}$.*

1. *Montrer que la suite (w_n) est croissante.*
2. *Montrer que la suite (w_n) est majorée.*
3. *En déduire que (w_n) est convergente, et déterminer sa limite.*

Solution 28 1. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{4^{n+1} - (n+1)}{4^{n+1} + (n+1)} - \frac{4^n - n}{4^n + n} \\ &= \frac{(4^{n+1} - n - 1)(4^n + n) - (4^n - n)(4^{n+1} + n + 1)}{(4^{n+1} + n + 1)(4^n + n)} \\ &= 2\frac{n4^{n+1} - (n+1)\,4^n}{(4^{n+1} + n + 1)(4^n + n)} \\ &= 2 \cdot 4^n \frac{4n - (n+1)}{(4^{n+1} + n + 1)(4^n + n)} \\ &= 2 \cdot 4^n \frac{3n - 1}{(4^{n+1} + n + 1)(4^n + n)}. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, on constate que le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $w_{n+1} - w_n > 0$. Donc, (w_n) est croissante (Définition 1.2 du cours 1 [1]).

2. *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a*

$$w_n = \frac{4^n - n}{4^n + n} \leq \frac{4^n}{4^n + n} \leq \frac{4^n}{4^n} = 1.$$

La suite est majorée par 1.

3. *Comme la suite (w_n) est croissante et majorée, elle est convergente (Théorème 1.12 du cours 1 [1]). Pour trouver sa limite, on encadre w_n.*

   Montrons d'abord par récurrence (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]) que $4^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1$, $4 \geq 1$. Si $4^n \geq n^2$ pour un certain $n \geq 1$, alors $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \geq 4n^2 \geq (n+1)^2$, car $4n^2 - (n+1)^2 = 3n^2 - 2n - 1 = (n-1)(3n+1) \geq 0$.

   On a alors, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq 1 - w_n = \frac{(4^n + n) - (4^n - n)}{4^n + n} = \frac{2n}{4^n + n} \leq \frac{2n}{4^n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

   Donc $1 - \frac{2}{n} \leq w_n \leq 1$, et comme $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$ (Théorèmes 1.6 et 1.7 du cours 1 [1]), le théorème des gendarmes (Théorème 1.8) donne

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 1.$$

5 Raisonnement par récurrence

Exercice 29 *Soit la proposition $P(n)$: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Démontrer $P(n)$ pour tout entier naturel $n \geq 1$ par récurrence.*

Solution 29 Initialisation *: Pour $n = 1$, $P(1)$ est vraie car $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.*

Hérédité *: Supposons $P(k)$ vraie pour un certain entier $k \geq 1$, c'est-à-dire $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Il faut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. En ajoutant $(k+1)$ des deux côtés de l'égalité de $P(k)$, on obtient*

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion *: Par récurrence (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.*

Exercice 30 *Soit la suite (x_n) définie par récurrence par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = 2x_n + 3$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 5 \cdot 2^n - 3$.*

Solution 30 *Soit la proposition $P(n)$: $x_n = 5 \cdot 2^n - 3$.*

Initialisation *: Pour $n = 0$, $x_0 = 2 = 5 \cdot 2^0 - 3$, donc $P(0)$ est vraie.*

Hérédité *: Supposons $P(k)$ vraie pour un certain entier $k \geq 0$, c'est-à-dire $x_k = 5 \cdot 2^k - 3$. Il faut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $x_{k+1} =$*

$5 \cdot 2^{k+1} - 3$. *En effet,*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 2x_k + 3 \\ &= 2(5 \cdot 2^k - 3) + 3 \\ &= 5 \cdot 2^{k+1} - 6 + 3 \\ &= 5 \cdot 2^{k+1} - 3. \end{aligned}$$

Conclusion *: Par récurrence (Théorème 1.13 du cours 1 [1]), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.*

Exercice 31 *Soit la suite (y_n) définie par récurrence par $y_1 = \frac{1}{2}$ et $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.*

Solution 31 *Soit la proposition $P(n)$: $y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.*

Initialisation *: Pour $n = 1$, $y_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$, donc $P(1)$ est vraie.*

Hérédité *: Supposons $P(k)$ vraie pour un certain entier $k \geq 1$, c'est-à-dire $y_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Il faut montrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $y_{k+1} = 1 - \frac{1}{k+2}$. En effet,*

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+2}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{k+2-1}{(k+1)(k+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{k+2}. \end{aligned}$$

Conclusion *: Par récurrence (Théorème 1.13 et Remarque 1.5 du cours 1 [1]), $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.