Exercices type Bac & Solutions : Limite d'une fonction

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 2.1 du cours 2* désigne un énoncé numéroté du cours 2 [1]. Le renvoi *cours 11* désigne le cours sur les fonctions trigonométriques [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

Table des matières

1 Définition de la limite d'une fonction **1**

2 Opérations sur les limites **3**
2.1 Lever l'indétermination dans la limite 3
2.2 Limite d'une fonction composée 4

3 Théorème des gendarmes **6**

4 Limites à droite et à gauche **7**

5 Asymptotes **8**
5.1 Asymptotes horizontale et verticale 8
5.2 Asymptote oblique 10

1 Définition de la limite d'une fonction

Exercice 1 *Trouver la limite de la fonction* $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

Solution 1 *Pour* $x > 0$, *on a*

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2}{1+\frac{1}{x}}.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *(Théorème 2.1 du cours 2), le dénominateur tend vers* 1 *(Théorème 2.2 du cours 2), donc (Théorème 2.3 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Exercice 2 *Calculer la limite de* $h(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

Solution 2 *La limite est de la forme* $+\infty + (-\infty)$, *qui est indéterminée. Pour* $x > 0$, *on a* $\sqrt{x^2+1} + x > 0$, *et, en multipliant par la forme conjuguée, on obtient*

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x^2+1} - x \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1) = +\infty$ *et* $\lim_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$, *on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$$

(Théorèmes 2.1 et 2.4 du cours 2), donc le dénominateur tend vers $+\infty$ *(Théorème 2.2 du cours 2), et*

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

par le Théorème 2.3 du cours 2 [1].

Exercice 3 *Déterminer si la fonction* $g(x) = \frac{1}{x}$ *a une limite lorsque* x *tend vers* 0.

Solution 3 *Considérons la fonction* $g(x) = \frac{1}{x}$. *Pour déterminer la limite de* $g(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0, *nous devons examiner les limites à droite et à gauche séparément. Pour la limite à droite (lorsque* x *tend vers* 0 *par des valeurs positives), nous avons (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Cela signifie que lorsque x *se rapproche de* 0 *par des valeurs positives,* $g(x)$ *devient arbitrairement grand. Pour la limite à gauche (lorsque* x *tend vers* 0 *par des valeurs négatives), nous avons :*

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Cela signifie que lorsque x *se rapproche de* 0 *par des valeurs négatives,* $g(x)$ *est négatif et devient arbitrairement grand en valeur absolue. Puisque les limites à droite et à gauche ne sont pas égales, la fonction* g *n'a pas de limite lorsque* x *tend vers* 0 *(Théorème 2.6 du cours 2 [1]).*

2 Opérations sur les limites

2.1 Lever l'indétermination dans la limite

Exercice 4 *Calculer la limite de* $f(x) = \frac{3x^3-x^2+2}{2x^3+5x-1}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.

Solution 4 *La limite est de la forme* $\frac{\infty}{\infty}$. *Pour lever l'indétermination, on divise le numérateur et le dénominateur par la plus haute puissance de* x *du dénominateur, ici* x^3, *pour* $x > 1$ *(le dénominateur est alors positif) :*

$$f(x) = \frac{3x^3/x^3 - x^2/x^3 + 2/x^3}{2x^3/x^3 + 5x/x^3 - 1/x^3}.$$

On simplifie chaque terme :

$$f(x) = \frac{3 - 1/x + 2/x^3}{2 + 5/x^2 - 1/x^3}.$$

Lorsque x *tend vers* $+\infty$, *les termes* $1/x$, $1/x^2$ *et* $1/x^3$ *tendent vers* 0 *(Théorèmes 2.1 et 2.3 du cours 2), donc, par les Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 5 *Calculer la limite de* $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ *lorsque* x *tend vers* 2.

Solution 5 *La limite est de la forme* $\frac{0}{0}$. *Pour lever l'indétermination, on factorise le numérateur, qui est une différence de deux carrés : pour* $x \neq 2$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2.$$

La limite quand x *tend vers* 2 *est donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4.$$

Exercice 6 *Trouver la limite de* $g(x) = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ *lorsque* x *tend vers* 0.

Solution 6 *La fonction* g *est définie pour* $x \geq -9$, $x \neq 0$, *et sa limite en* 0 *est de la forme* $\frac{0}{0}$. *Pour lever l'indétermination, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la forme conjuguée du numérateur, qui est strictement positive :*

$$g(x) = \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{x} \times \frac{\sqrt{x + 9} + 3}{\sqrt{x + 9} + 3}.$$

On développe le numérateur :

$$g(x) = \frac{x + 9 - 9}{x(\sqrt{x + 9} + 3)}.$$

On simplifie par $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+9}+3}.$$

Comme $\lim_{x\to 0}(x+9) = 9$ et que la racine carrée est continue en 9, on a $\lim_{x\to 0}\sqrt{x+9} = 3$ (Théorèmes 2.1 et 2.4 du cours 2) ; le dénominateur tend donc vers 6, et, par le Théorème 2.3 du cours 2 [1], la limite quand x tend vers 0 est :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{\sqrt{0+9}+3} = \frac{1}{6}.$$

2.2 Limite d'une fonction composée

Exercice 7 *Calculer la limite de $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x+1}{4x^2+x+3}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.*

Solution 7 *Les trinômes x^2-x+1 et $4x^2+x+3$ ont un discriminant négatif (-3 et -47) et un coefficient dominant positif : ils sont strictement positifs, et f est définie sur $\mathbb{R}$.*

Solution succincte *: Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{4x^2+x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{1}{4}$ et $\lim_{y\to\frac{1}{4}}\sqrt{y} = \frac{1}{2}$, la fonction composée a comme limite (Théorème 2.4 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{4x^2+x+3}} = \lim_{y\to\frac{1}{4}}\sqrt{y} = \frac{1}{2}.$$

Solution détaillée *: Considérons les deux fonctions $u(x) = \frac{x^2-x+1}{4x^2+x+3}$ et $v(y) = \sqrt{y}$, où $y = u(x)$. Nous allons utiliser le théorème de la limite d'une fonction composée (Théorème 2.4 du cours 2 [1]) pour trouver la limite de $f(x)$. D'abord, calculons la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, nous divisons le numérateur et le dénominateur par x^2, le terme de plus haut degré, pour $x \neq 0$:*

$$u(x) = \frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, les termes $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 (Théorème 2.1 du cours 2), donc, par les Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [1],

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \frac{1-0+0}{4+0+0} = \frac{1}{4}.$$

Ensuite, la fonction racine carrée est continue en $\frac{1}{4}$, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1])

$$\lim_{y\to\frac{1}{4}} v(y) = \lim_{y\to\frac{1}{4}}\sqrt{y} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Le Théorème 2.4 du cours 2 [1] dit que, si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = L$ *et* $\lim_{y\to L} v(y) = M$*, avec* v *continue en* L*, alors* $\lim_{x\to+\infty} v(u(x)) = M$*. Dans notre cas,* $L = \frac{1}{4}$ *et* $M = \frac{1}{2}$*, donc :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} v(u(x)) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-x+1}{4x^2+x+3}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la limite de $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *est* $\frac{1}{2}$*.*

Exercice 8 *Calculer la limite de* $f(x) = \sin(x^2 + \frac{\pi}{2})$ *lorsque* x *tend vers* 0*.*

Solution 8 Solution succincte *: Comme* $\lim_{x\to0}(x^2 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin(y) = 1$*, la fonction composée a comme limite (Théorème 2.4 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \sin(x^2 + \frac{\pi}{2}) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin(y) = 1.$$

Solution détaillée *: Considérons les deux fonctions* $u(x) = x^2 + \frac{\pi}{2}$ *et* $v(y) = \sin(y)$*, où* $y = u(x)$*. Nous allons utiliser le théorème de la limite d'une fonction composée (Théorème 2.4 du cours 2 [1]) pour trouver la limite de* $f(x)$*. D'abord, calculons la limite de* $u(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0 *; u est un polynôme, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to0} u(x) = \lim_{x\to0} \left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ensuite, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *(cours 11 [2]), et la fonction sinus est continue en* $\frac{\pi}{2}$*, donc (Théorème 2.1 du cours 2 [1])*

$$\lim_{y\to\frac{\pi}{2}} v(y) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \sin(y) = 1.$$

Le Théorème 2.4 du cours 2 [1] dit que, si $\lim_{x\to0} u(x) = L$ *et* $\lim_{y\to L} v(y) = M$*, avec* v *continue en* L*, alors* $\lim_{x\to0} v(u(x)) = M$*. Dans notre cas,* $L = \frac{\pi}{2}$ *et* $M = 1$*, donc :*

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} v(u(x)) = \lim_{x\to0} \sin(x^2 + \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Ainsi, la limite de $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0 *est* 1*.*

Exercice 9 *Déterminer si la fonction* $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *a une limite lorsque* x *tend vers* 0*.*

Solution 9 Solution succincte *:* $\lim_{x\to0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'existe pas, car* f *prend les valeurs* 1 *et* -1 *en des points aussi proches de* 0 *qu'on veut.*

Solution détaillée *: Pour tout entier* $k \geq 0$*, posons*

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \qquad y_k = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Ce sont des réels strictement positifs, avec $f(x_k) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ *et* $f(y_k) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$ *(cours 11 [2]) ; et, pour tout* $\delta > 0$*, on a* $x_k < \delta$ *et* $y_k < \delta$ *dès que* k *est assez grand, car* x_k *et* y_k *sont inférieurs à* $\frac{1}{2k\pi}$ *pour* $k \geq 1$*.*

Supposons que $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$*. La fonction* f *est bornée par* 1 *en valeur absolue (cours 11 [2]), donc* ℓ *ne peut pas être* $+\infty$ *(la Définition 2.2 du cours 2 [1], avec* $M = 1$*, demanderait* $f(x) > 1$ *pour* x *voisin de* 0*) ; de même,* $\ell \neq -\infty$*. Donc* ℓ *est un réel. Appliquons la Définition 2.2 du cours 2 [1] avec* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *: il existe* $\delta > 0$ *tel que* $|f(x) - \ell| < \frac{1}{2}$ *pour tout* $x \neq 0$ *avec* $|x| < \delta$*. En choisissant* k *tel que* $x_k < \delta$ *et* $y_k < \delta$*, on obtient* $|1 - \ell| < \frac{1}{2}$ *et* $|-1 - \ell| < \frac{1}{2}$*, donc*

$$2 = |1 - (-1)| \leq |1 - \ell| + |\ell + 1| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui est absurde. Donc la limite de $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* 0 *n'existe pas.*

3 Théorème des gendarmes

Exercice 10 *Soit* $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$*. Montrer que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ *en utilisant le théorème des gendarmes.*

Solution 10 *Pour tout* $x \neq 0$*,*

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

(cours 11 [2]) ; en multipliant par $x^2 > 0$*, on a*

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Comme $\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$ *(Théorème 2.1 du cours 2), par le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 du cours 2 [1]),* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$*.*

Exercice 11 *Utiliser le théorème des gendarmes pour prouver que*

$$\lim_{x\to 0} x\cos(x) = 0.$$

Solution 11 *Pour tout réel* x*,* $|\cos(x)| \leq 1$ *(cours 11 [2]), donc*

$$|x\cos(x)| = |x|\,|\cos(x)| \leq |x|\,,$$

c'est-à-dire

$$-|x| \leq x\cos(x) \leq |x|\,.$$

Comme $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ *(Définition 2.2 du cours 2, avec* $\delta = \varepsilon$*), on a aussi* $\lim_{x\to 0}(-|x|) = 0$ *(Théorème 2.2 du cours 2 [1]). Par le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 du cours 2 [1]),* $\lim_{x\to 0} x\cos(x) = 0$*.*

Exercice 12 *On admet que, pour tout réel x non nul,*

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

en utilisant le théorème des gendarmes.

Solution 12 *On part des inégalités, vraies pour tout $x \neq 0$:*

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Comme les deux bornes ont pour limite 1 lorsque x tend vers 0 (Théorème 2.1 du cours 2, pour le polynôme $1 - \frac{x^2}{2}$), par le théorème des gendarmes (Théorème 2.5 du cours 2 [1]), $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

4 Limites à droite et à gauche

Exercice 13 *Étudier les limites à droite et à gauche de la fonction $f(x) = \frac{x}{x-2}$ lorsque x tend vers 2. La limite $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}$ existe-t-elle ?*

Solution 13 *Pour étudier les limites à droite et à gauche de la fonction $f(x) = \frac{x}{x-2}$ lorsque x tend vers 2, nous devons considérer séparément les cas où x s'approche de 2 par des valeurs supérieures (limite à droite) et par des valeurs inférieures (limite à gauche). Dans les deux cas, le numérateur tend vers $2 > 0$ et le dénominateur vers 0.*

Limite à droite *: Pour $x > 2$, on a $x - 2 > 0$, donc $x - 2$ tend vers 0^+ et, par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty.$$

La fonction tend vers $+\infty$ lorsque x s'approche de 2 par la droite.

Limite à gauche *: Pour $x < 2$, on a $x - 2 < 0$, donc $x - 2$ tend vers 0^- et*

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty.$$

La fonction tend vers $-\infty$ lorsque x s'approche de 2 par la gauche.

En conclusion, la limite de la fonction $f(x)$ lorsque x tend vers 2 n'existe pas, car les limites à droite et à gauche sont différentes (Théorème 2.6 du cours 2 [1]) :

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty.$$

Exercice 14 *Déterminer les limites à droite et à gauche de $g(x) = \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0. La limite $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)$ existe-t-elle ?*

Solution 14 *Pour déterminer les limites à droite et à gauche de la fonction* $g(x) = \frac{1}{x^2}$ *lorsque* x *tend vers* 0*, nous devons examiner le comportement de la fonction lorsque* x *s'approche de* 0 *par des valeurs positives (limite à droite) et par des valeurs négatives (limite à gauche).*

Limite à droite *: Lorsque* x *tend vers* 0 *par des valeurs positives* ($x > 0$)*,* x^2 *est strictement positif et tend vers* 0*. Par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),* $\frac{1}{x^2}$ *tend donc vers* $+\infty$*. Ainsi, nous avons :*

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

Limite à gauche *: Lorsque* x *tend vers* 0 *par des valeurs négatives* ($x < 0$)*,* x^2 *est également strictement positif et tend vers* 0*. De même,* $\frac{1}{x^2}$ *tend vers* $+\infty$*. Donc :*

$$\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

Puisque les limites à droite et à gauche sont toutes deux égales à $+\infty$*, la limite de* $g(x)$ *en* 0 *existe et vaut* $+\infty$ *(Théorème 2.6 du cours 2 ; ce résultat figure aussi dans le Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

Exercice 15 *Calculer la limite à droite et la limite à gauche de la fonction* $f(x) = \frac{|x|}{x}$ *lorsque* x *tend vers* 0*. La limite* $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ *existe-t-elle ?*

Solution 15 *Pour* $x > 0$*,* $|x| = x$*, et pour* $x < 0$*,* $|x| = -x$*. La limite à droite est donc*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

et la limite à gauche est

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Comme ces deux limites sont différentes, la limite $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ *n'existe pas (Théorème 2.6 du cours 2 [1]).*

5 Asymptotes

5.1 Asymptotes horizontale et verticale

Exercice 16 *Trouver les asymptotes horizontales de la courbe de la fonction* $f(x) = \frac{2x}{x+1}$*.*

Solution 16 *Pour trouver les asymptotes horizontales de la courbe de f, nous devons calculer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$. Pour $x \neq 0$ et $x \neq -1$, $f(x) = \frac{2}{1+\frac{1}{x}}$, et $\frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$ et en $-\infty$ (Théorème 2.1 du cours 2), donc (Théorèmes 2.2 et 2.3 du cours 2 [1])*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{1+0} = 2.$$

Puisque les deux limites sont égales à 2, la courbe de f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ (Définition 2.4 du cours 2 [1]).

Exercice 17 *Déterminer les asymptotes verticales de la courbe de $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$.*

Solution 17 *Pour déterminer les asymptotes verticales de la courbe de g, nous cherchons les valeurs de x près desquelles $g(x)$ devient infini. Le dénominateur s'annule en $x = 1$ et en $x = -2$; le numérateur vaut $1 > 0$. Nous étudions le signe du dénominateur près de ces points.*

Près de 1, $x + 2$ tend vers $3 > 0$, donc $(x - 1)(x + 2)$ tend vers 0 avec le signe de $x - 1$: positif si $x > 1$, négatif si $x < 1$. Près de -2, $x - 1$ tend vers $-3 < 0$, donc $(x-1)(x+2)$ tend vers 0 avec le signe contraire de celui de $x+2$: négatif si $x > -2$, positif si $x < -2$. Par la règle des signes (Théorème 2.3 du cours 2 [1]),

$$\lim_{x\to1^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to1^-} g(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to(-2)^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to(-2)^-} g(x) = +\infty.$$

La courbe de g admet donc deux asymptotes verticales, d'équations $x = 1$ et $x = -2$ (Définition 2.5 du cours 2 [1]). Il n'y en a pas d'autre : en tout autre réel a, g est une fonction rationnelle continue, donc sa limite $g(a)$ est finie (Théorème 2.1 du cours 2 [1]).

Exercice 18 *La courbe de la fonction $h(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ admet-elle des asymptotes horizontales ou verticales ?*

Solution 18 *Pour les asymptotes horizontales, nous examinons les limites à l'infini ; pour $x \neq 0$ et $x \neq 2$, on factorise par le terme de plus haut degré :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}} = -\infty,$$

car $1-\frac{4}{x^2}$ *et* $1-\frac{2}{x}$ *tendent vers* 1 *(Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 du cours 2 [1]). Il n'y a pas d'asymptote horizontale, car ces limites ne sont pas finies (Définition 2.4 du cours 2 [1]).*

Pour une asymptote verticale, la seule valeur à examiner est celle où le dénominateur s'annule, $x = 2$ *: en tout autre réel* a*,* h *est une fonction rationnelle continue, donc sa limite* $h(a)$ *est finie (Théorème 2.1 du cours 2 [1]). Pour* $x \neq 2$*,* $h(x) = x + 2$*, donc*

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

Cette limite est finie, ainsi que les limites à droite et à gauche en 2*, qui valent aussi* 4 *(Théorème 2.6 du cours 2) : il n'y a pas d'asymptote verticale (Définition 2.5 du cours 2 [1]).*

5.2 Asymptote oblique

Exercice 19 *Déterminer l'équation de l'asymptote oblique de la courbe de* $g(x) = x + \frac{3}{x}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *et vers* $-\infty$*.*

Solution 19 *L'asymptote oblique est donnée par la partie affine de la fonction. Ici, la partie affine est* x*, d'où la droite d'équation* $y = x$*. Nous vérifions que la différence entre* $g(x)$ *et* x *tend vers* 0 *(Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} (g(x)-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

La courbe de g *admet donc en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *l'asymptote oblique d'équation* $y = x$ *(Définition 2.6 du cours 2 [1], avec* $a = 1 \neq 0$*).*

Exercice 20 *Calculer l'équation de l'asymptote oblique de la courbe de* $h(x) = \frac{2x^2+3x+3}{x}$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$ *et vers* $-\infty$*.*

Solution 20 *Pour trouver l'asymptote oblique, nous simplifions la fonction : pour* $x \neq 0$*,*

$$h(x) = \frac{2x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{3}{x} = 2x + 3 + \frac{3}{x}.$$

L'asymptote oblique est donnée par la partie affine de la fonction, $2x + 3$*, d'où la droite d'équation* $y = 2x + 3$*. Nous vérifions que la différence entre* $h(x)$ *et* $2x + 3$ *tend vers* 0 *(Théorème 2.1 du cours 2 [1]) :*

$$\lim_{x\to+\infty} (h(x) - (2x+3)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (h(x) - (2x+3)) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0.$$

La courbe de h *admet donc en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *l'asymptote oblique d'équation* $y = 2x + 3$ *(Définition 2.6 du cours 2 [1], avec* $a = 2 \neq 0$*).*

Exercice 21 *Trouver l'équation de l'asymptote oblique de la courbe de la fonction* $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x+1}$.

Indication *: Utiliser le fait que*

$$x^2 - x + 1 = (x-2)(x+1) + 3.$$

Solution 21 *En utilisant l'égalité*

$$x^2 - x + 1 = (x-2)(x+1) + 3,$$

on obtient, pour $x \neq -1$ *:*

$$f(x) = x - 2 + \frac{3}{x+1}.$$

L'asymptote oblique est donnée par la partie affine, $x - 2$*, d'où la droite d'équation* $y = x - 2$*. Nous vérifions que la différence entre* $f(x)$ *et* $x - 2$ *tend vers* 0 *; comme* $x + 1$ *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$ *et vers* $-\infty$ *en* $-\infty$ *(Théorème 2.2 du cours 2), on a, par le Théorème 2.3 du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+1} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (x-2)) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x+1} = 0.$$

La courbe de f *admet donc en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *l'asymptote oblique d'équation* $y = x - 2$ *(Définition 2.6 du cours 2 [1], avec* $a = 1 \neq 0$*).*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.