Exercices type Bac & Solutions : Fonction continue, Continuité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 3.1 du cours 3* désigne un énoncé numéroté du cours 3 [2]. Les renvois *cours 2*, *cours 4*, *cours 5* et *cours 11* désignent les cours correspondants [1, 3, 4, 5]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition de la continuité **1**

2 Opérations sur la continuité **2**

3 Théorème des valeurs intermédiaires **3**

4 Prolongement par continuité **5**

1 Définition de la continuité

Exercice 1 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.*

1. *Montrer que f est continue en $x = 1$.*
2. *Calculer la limite de f en $x = 1$.*

Solution 1

1. *La fonction f est une fonction affine (polynôme de degré 1), donc elle est continue sur tout $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]), y compris en $x = 1$.*
2. *La limite de f en $x = 1$ est $f(1) = 2(1) + 3 = 5$, puisque f est continue en 1 (Définition 3.1 du cours 3 [2]).*

Exercice 2 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.*

1. *Montrer que g est continue en $x = 2$.*

2. *Déterminer si g est continue en $x = 0$.*

Solution 2 *1. La fonction g est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Théorème 3.1 (ii) et Définition 3.2 du cours 3) ; en particulier, elle est continue en $x = 2$ (Définition 3.1 du cours 3 [2], avec $I =]0, +\infty[$).*

2. La fonction g n'est pas définie en $x = 0$, donc elle n'est pas continue en ce point.

Exercice 3 *Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$.*

1. *Montrer que h est continue en $x = 1$.*

2. *Déterminer si h est continue sur $\mathbb{R}$.*

Solution 3 *1. Pour que h soit continue en $x = 1$, les limites à gauche et à droite doivent être égales à la valeur de la fonction en ce point. On a $h(1) = 1^2 = 1$ et $\lim_{x \to 1^+} h(x) = 2(1) - 1 = 1$. La limite à gauche est $\lim_{x \to 1^-} h(x) = 1^2 = 1$. Les limites coïncident avec $h(1)$, donc $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$ (cours 2 [1]) et h est continue en $x = 1$ (Définition 3.1 du cours 3 [2]).*

2. Sur $]-\infty, 1[$, h coïncide avec le polynôme x^2, et sur $]1, +\infty[$ avec le polynôme $2x - 1$; elle est donc continue en tout point de ces deux intervalles (cours 2 [1] et Théorème 3.1 du cours 3 [2]). Avec la question 1, h est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ (Définition 3.2 du cours 3 [2]).

2 Opérations sur la continuité

Exercice 4 *Soient les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, toutes deux définies sur $[0, +\infty[$.*

1. *Montrer que la somme $f + g$ est continue sur $[0, +\infty[$.*

2. *Montrer que le produit $f \cdot g$ est continu sur $[0, +\infty[$.*

3. *Montrer que le rapport $\frac{f}{g}$ est continu sur $]0, +\infty[$.*

Solution 4 *1. f et g sont continues sur $[0, +\infty[$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]). La somme de deux fonctions continues est continue (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc $f + g$ est continue sur $[0, +\infty[$.*

2. Le produit de deux fonctions continues est continu (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc le produit $f \cdot g$ est continu sur $[0, +\infty[$.

3. Le rapport de deux fonctions continues est continu là où le dénominateur est non nul (Théorème 3.2 du cours 3 [2]) ; or $g(x) = \sqrt{x} \neq 0$ pour $x > 0$, donc le rapport $\frac{f}{g}$ est continu sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5 *Soient les fonctions $f(x) = x^3$ et $g(x) = \ln(x)$, f étant définie sur $\mathbb{R}$ et g sur $]0, +\infty[$.*

1. *Montrer que la somme $f + g$ est continue sur $]0, +\infty[$.*
2. *Montrer que le produit $f \cdot g$ est continu sur $]0, +\infty[$.*
3. *Montrer que la composition $f \circ g$ est continue sur $]0, +\infty[$.*

Solution 5
1. *f et g sont continues sur $]0, +\infty[$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]). La somme de deux fonctions continues est continue (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc $f + g$ est continue sur $]0, +\infty[$.*
2. *Le produit de deux fonctions continues est continu (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc le produit $f \cdot g$ est continu sur $]0, +\infty[$.*
3. *Soit $a > 0$. La fonction g est continue en a, et f, définie et continue sur $J = \mathbb{R}$, qui contient $g(x)$ pour tout $x > 0$, est continue en $g(a)$; donc $f \circ g$ est continue en a (Théorème 3.3 du cours 3 [2]). Ceci vaut pour tout $a > 0$, donc $f \circ g$ est continue sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 6 *Soient les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que la somme $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que le produit $f \cdot g$ est continu sur $\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que le rapport $\frac{f}{g}$ est continu sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.*

Solution 6
1. *f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]). La somme de deux fonctions continues est continue (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc $f + g$ est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Le produit de deux fonctions continues est continu (Théorème 3.2 du cours 3 [2]), donc le produit $f \cdot g$ est continu sur $\mathbb{R}$.*
3. *Le rapport de deux fonctions continues est continu là où le dénominateur est non nul (Théorème 3.2 du cours 3 [2]). Comme $g(x) = \cos(x)$ s'annule exactement aux points $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (cours 11 [5]), le rapport $\frac{f}{g}$ est continu sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (Définition 3.2 du cours 3 [2]).*

3 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 7 *Soit la fonction f définie sur $[0, 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.*

1. *Montrer que f est continue sur $[0, 3]$.*
2. *Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.*

Solution 7 *1. La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]), y compris sur $[0,3]$.*

2. On a $f(0)=1$ et $f(1)=1^3-3\cdot 1+1=-1$; on constate que $f(0)\cdot f(1)<0$. Comme f est continue sur $[0,1]$, il existe un $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=0$ par le théorème des valeurs intermédiaires (Corollaire 3.1 du cours 3 [2]), qui donne même $c\in]0,1[$.

Exercice 8 *Soit la fonction g définie sur $[-2,2]$ par $g(x)=x^2-2$.*

1. Montrer que g est continue sur $[-2,2]$.

2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un $c\in[0,2]$ tel que $g(c)=0$.

Solution 8 *1. La fonction g est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]), y compris sur $[-2,2]$.*

2. On a $g(0)=-2$ et $g(2)=4-2=2$. Puisque $g(0)<0$ et $g(2)>0$, il existe un $c\in[0,2]$ tel que $g(c)=0$ par le théorème des valeurs intermédiaires, g étant continue sur $[0,2]$ (Corollaire 3.1 du cours 3 [2], qui donne même $c\in]0,2[$).

Exercice 9 *Soit la fonction h définie sur $[1,4]$ par $h(x)=\ln(x)-1$.*

1. Montrer que h est continue sur $[1,4]$.

2. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer qu'il existe un $c\in[1,4]$ tel que $h(c)=0$.

Solution 9 *1. La fonction $\ln$ est continue sur $]0,+\infty[$ (Théorème 3.1 (iv) du cours 3), de même que la fonction constante égale à -1 (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]). Donc h est continue sur $[1,4]$ (Théorèmes 3.1 et 3.2 du cours 3 [2]).*

2. On a $h(1)=\ln(1)-1=-1$. Comme $4>e$ ($e\approx 2{,}718$) et que $\ln$ est strictement croissante (cours 5 [4]), $\ln(4)>\ln(e)=1$, donc $h(4)=\ln(4)-1>0$. Puisque $h(1)<0$ et $h(4)>0$, et que h est continue sur $[1,4]$ (question 1), il existe un $c\in[1,4]$ tel que $h(c)=0$ par le théorème des valeurs intermédiaires (Corollaire 3.1 du cours 3 [2], qui donne même $c\in]1,4[$).

Exercice 10 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-1$.*

1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution c dans $\mathbb{R}$, et que $c\in]0,1[$.

Solution 10 *1. La fonction f est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [2]). Sa dérivée $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1$ est strictement positive pour tout x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (cours 4 [3]).*

2. Pour $x \neq 0$, on factorise par le terme de plus haut degré (cours 2 [1]) : $f(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$, et la parenthèse tend vers 1 en $\pm\infty$. Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle ouvert $]-\infty, +\infty[$, et 0 est strictement compris entre ses limites $-\infty$ et $+\infty$. Par la Remarque 3.1 du cours 3 [2], il existe un unique réel c tel que $f(c) = 0$. De plus $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$; comme f est continue sur $[0, 1]$, le Corollaire 3.1 du cours 3 [2] donne un réel de $]0, 1[$ où f s'annule, qui est c par unicité. Donc $c \in]0, 1[$.

4 Prolongement par continuité

Exercice 11 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$.*

1. Simplifier l'expression de f et déterminer la limite en 2.

2. Prolonger f par continuité en 2.

Solution 11 *1. On peut simplifier $f(x)$ en factorisant le numérateur :*

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}.$$

En simplifiant, on obtient $f(x) = x + 2$ pour tout $x \neq 2$; f, fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule qu'en 2, est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (Théorème 3.1 (ii) et Définition 3.2 du cours 3 [2]). Comme f coïncide avec $x \mapsto x + 2$ pour $x \neq 2$, et que cette fonction est continue en 2 (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [2]), la limite en 2 est (cours 2 [1]) :

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 + 2 = 4.$$

2. Le prolongement par continuité de f en 2 est obtenu en définissant $f(2) = 4$ (Définition 3.3 du cours 3 [2]).

Exercice 12 *Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$.*

1. Déterminer les limites de g à droite et à gauche de 1.

2. Le prolongement par continuité de g est-il possible en 1 ?

Solution 12 *1. Le numérateur tend vers* 1 *et* x^2-1 *tend vers* 0*, avec* $x^2-1 > 0$ *pour* $x > 1$ *et* $x^2-1 < 0$ *pour* $-1 < x < 1$ *(cours 2 [1]). Les limites de* g *à droite et à gauche de* 1 *sont donc :*

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty.$$

2. Le prolongement par continuité de g *n'est pas possible en* 1 *(Remarque 3.2 du cours 3 [2], avec* $I =]-1, +\infty[$*) : ses limites à droite et à gauche de* 1 *étant infinies (question 1), la fonction* g *n'admet pas de limite finie en ce point (cours 2 [1]).*

Exercice 13 *Soit la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *par* $h(x) = \frac{\sin(x)}{x}$*.*

1. Déterminer la limite de h *en* 0*.*

2. Prolonger h *par continuité en* 0*.*

Solution 13 *1. Pour* $x \neq 0$*,* $h(x) = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}$ *est le taux de variation de* sin *entre* 0 *et* x*. Comme* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, de dérivée* cos *(résultat admis dans le cours 11 [5]), la définition du nombre dérivé (cours 4 [3]) montre que la limite de* h *en* 0 *est* $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ *:*

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1.$$

2. La fonction h*, quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, y est continue (Théorèmes 3.1 et 3.2 du cours 3 [2]). Le prolongement par continuité de* h *en* 0 *est obtenu en définissant* $h(0) = 1$ *(Définition 3.3 du cours 3 [2]).*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.