Exercices type Bac & Solutions : Fonction dérivée, dérivation

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 4.2 du cours 4* désigne un énoncé numéroté du cours 4 [2], et un renvoi comme *Théorème 2.3 du cours 2* un énoncé du cours sur la limite d'une fonction [1]. Les renvois *cours 6* et *cours 11* désignent les cours sur la fonction exponentielle [3] et sur les fonctions trigonométriques [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition de la dérivée **1**

2 Propriétés de la dérivée **2**
2.1 Somme, produit et rapport de deux fonctions dérivables 2
2.2 Dérivées à retenir 3
2.3 Composition de deux fonctions dérivables 4

3 Tableau de variation **5**

4 Équation de la tangente **7**

5 Application de la dérivée pour calculer une limite **8**

1 Définition de la dérivée

Exercice 1 *Trouver la dérivée de la fonction* $f(x) = 3x^2$.

Solution 1 *La fonction* $x \mapsto x^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $2x$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2])*

$$f'(x) = 3 \times 2x = 6x.$$

Exercice 2 *Calculer la dérivée de la fonction* $g(x) = \sqrt{x}$ *en un point* $a > 0$.

Solution 2 *On revient à la définition (Définition 4.1 du cours 4 [2]). Pour $x \geq 0$, $x \neq a$, on multiplie par la forme conjuguée, en notant que $\sqrt{x} + \sqrt{a} > 0$ car $a > 0$:*

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.$$

Quand x tend vers a, $\sqrt{x}$ tend vers $\sqrt{a}$ (Théorème 2.1 (iv) du cours 2), donc le dénominateur tend vers $2\sqrt{a} \neq 0$ (Théorème 2.2 (i) du cours 2), et le taux de variation tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ (Théorème 2.3 (i) du cours 2 [1]). Cette limite est finie, donc g est dérivable en a, et

$$g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

comme l'annonce le Théorème 4.2 du cours 4 [2].

Exercice 3 *Soit la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer $h'(x)$ et expliquer pourquoi $h(x)$ n'est pas dérivable en $x = 0$.*

Solution 3 *La fonction h est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]), et pour $x \neq 0$,*

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

La fonction h n'est pas dérivable en 0 car elle n'est pas définie en ce point : la Définition 4.1 du cours 4 [2] ne s'applique qu'en un point où la fonction est définie.

2 Propriétés de la dérivée

2.1 Somme, produit et rapport de deux fonctions dérivables

Exercice 4 *Soient $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$. Calculer la dérivée de la somme $f(x) + g(x)$.*

Solution 4 *Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 3x^2$ et $g'(x) = 2x$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc $f + g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et (Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2])*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x.$$

Exercice 5 *Trouver la dérivée du produit $f(x) \cdot g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$.*

Solution 5 *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et g sur $]0,+\infty[$, avec $f'(x)=2x$ et $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc $f\cdot g$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.3 (ii) du cours 4 [2]), et pour $x>0$, comme $\frac{x^2}{\sqrt{x}}=x\sqrt{x}$,*

$$\begin{aligned}(f\cdot g)'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\\ &= 2x\sqrt{x}+x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}\\ &= 2x\sqrt{x}+\frac{1}{2}x\sqrt{x}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Exercice 6 *Calculer la dérivée du rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.*

Solution 6 *Sur $]0,+\infty[$, f et g sont dérivables (exercice précédent) et g ne s'annule pas. Donc $\frac{f}{g}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.3 (iii) du cours 4 [2]), et pour $x>0$,*

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}\\ &= \frac{2x\cdot\sqrt{x}-x^2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\\ &= \frac{2x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\sqrt{x}}{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.\end{aligned}$$

2.2 Dérivées à retenir

Exercice 7 *Calculer la dérivée de la fonction $f(x)=x^n$, où $n\geq 1$ est un entier.*

Solution 7 *La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et (Théorème 4.2 du cours 4 [2])*

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

Exercice 8 *Trouver la dérivée de la fonction $g(x)=x\sqrt{x}$.*

Solution 8 *La fonction $x\mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.3 (ii) du cours 4 [2]), et pour $x>0$, comme $\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$,*

$$g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Vérification *par le procédé de la Remarque 4.1 du cours 4 [2] : $g(x)=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}$ et $\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.*

Exercice 9 *Calculer la dérivée de la fonction $h(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$.*

Solution 9 *Sur* $]0,+\infty[$, *la fonction* $g(x) = x\sqrt{x}$ *est dérivable, de dérivée* $g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ *(exercice précédent), et elle ne s'annule pas, car* $x\sqrt{x} > 0$. *Donc* $h = \frac{1}{g}$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *(Théorème 4.3 (iii) du cours 4 [2]), et pour* $x > 0$,

$$h'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = -\frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}},$$

car $\frac{\sqrt{x}}{x^3} = \frac{\sqrt{x}}{x^2\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$. Vérification *par le procédé de la Remarque 4.1 du cours 4 [2] :* $h(x) = x^{-3/2}$ *et* $-\frac{3}{2}x^{-5/2} = -\frac{3}{2x^{5/2}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

2.3 Composition de deux fonctions dérivables

Exercice 10 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Solution 10 *Soit* $u(x) = x^2 + 1$. *Alors* $f(x) = \sqrt{u(x)}$. *La fonction polynôme* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), avec*

$$u'(x) = 2x,$$

et $u(x) \geq 1 > 0$ *pour tout réel* x. *Par le Corollaire 4.1 du cours 4 [2] (formule de* $\sqrt{u}$*),* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exercice 11 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$.

Solution 11 *Soit* $u(x) = x^2 + 2x + 3$. *Alors* $f(x) = \sqrt{u(x)}$. *La fonction polynôme* u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), avec*

$$u'(x) = 2x + 2,$$

et $u(x) = (x+1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ *pour tout réel* x. *Par le Corollaire 4.1 du cours 4 [2],* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}.$$

Exercice 12 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Solution 12 *Soit* $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$, *fonction rationnelle dérivable sur* $]-\infty,1[$ *et sur* $]1,+\infty[$ *(Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), avec*

$$u'(x) = \frac{(x-1)(1) - (x+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Le quotient $u(x)$ *est strictement positif lorsque* $x+1$ *et* $x-1$ *sont non nuls et de même signe, c'est-à-dire pour* $x < -1$ *ou* $x > 1$. *Par le Corollaire 4.1 du*

cours 4 [2], appliqué sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ *et* $]1,+\infty[$, $f=\sqrt{u}$ *y est dérivable, et*

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right)=\frac{-1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}.$$

La fonction f est aussi définie en -1, où $f(-1)=0$; le Corollaire 4.1 du cours 4 [2] ne s'y applique pas, car $u(-1)=0$.

Exercice 13 *Calculer la dérivée de la composition $k(x)=\sin(e^x)$.*

Solution 13 *Soient $u(x)=e^x$ et $v(X)=\sin(X)$, de sorte que $k=v\circ u$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $u'(x)=e^x$ et $v'(X)=\cos(X)$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2], dérivées étudiées dans les cours 6 et 11 [3, 4]). Par le Théorème 4.4 du cours 4 [2], k est dérivable sur $\mathbb{R}$, et*

$$k'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=e^x\cos(e^x).$$

3 Tableau de variation

Exercice 14 *Établir le tableau de variation de la fonction $f(x)=x^2-2$. La fonction a-t-elle un minimum ?*

Solution 14 *La fonction f est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), et*

$$f'(x)=2x.$$

On a $f'(x)<0$ pour $x<0$, $f'(0)=0$ et $f'(x)>0$ pour $x>0$. Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [2], f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Pour $x\leq 0$, $f(x)\geq f(0)$ car f est décroissante sur $]-\infty,0]$; pour $x\geq 0$, $f(x)\geq f(0)$ car f est croissante sur $[0,+\infty[$. La fonction atteint donc un minimum en $x=0$, égal à $f(0)=-2$.

Exercice 15 *Établir le tableau de variation de la fonction $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. La fonction a-t-elle un extremum (minimum ou maximum) ?*

Solution 15 *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; c'est une fonction rationnelle, dérivable sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), et*

$$f'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0.$$

Par le Théorème 4.5 (ii) du cours 4 [2], appliqué sur chacun de ces deux intervalles, f est strictement croissante sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$. Elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, qui n'est pas un intervalle : par exemple $f(-2)=3>f(0)=-1$.

Limites en l'infini : pour $x\neq 0$ et $x\neq -1$,

$$f(x)=\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}},$$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ (Théorèmes 2.1 (i), 2.2 et 2.3 (i) du cours 2 [1]).

Limites en -1 : le numérateur tend vers -2, et le dénominateur $x+1$ tend vers 0 en restant positif à droite de -1, négatif à gauche. Par la règle des signes (Théorème 2.3 (ii) du cours 2 [1]),

$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty.$$

Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		-1^-	$\|\|$	-1^+		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|$		$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	1

La fonction n'a pas d'extremum : elle prend des valeurs aussi grandes qu'on veut à gauche de -1, et aussi petites qu'on veut à droite de -1. Elle n'est pas définie en -1.

Exercice 16 *Établir le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}$. La fonction a-t-elle un extremum ?*

Solution 16 *Remarquons d'abord que*

$$x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\geq 1>0.$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On a $f(x)=\sqrt{u(x)}$ où le polynôme $u(x)=x^2-2x+2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), avec

$$u'(x)=2x-2.$$

Comme $u>0$ sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Corollaire 4.1 du cours 4 [2]), et

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Le dénominateur est strictement positif, donc $f'(x)$ a le signe de $x-1$: $f'(x)<0$ pour $x<1$, $f'(1)=0$ et $f'(x)>0$ pour $x>1$. Par le Théorème 4.5 (ii) du

cours 4 [2], f est strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Le tableau de variation est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Pour $x \leq 1$, $f(x) \geq f(1)$ car f est décroissante sur $]-\infty, 1]$; pour $x \geq 1$, $f(x) \geq f(1)$ car f est croissante sur $[1, +\infty[$. La fonction atteint donc un minimum en $x = 1$, égal à $f(1) = 1$.

4 Équation de la tangente

Exercice 17 *Trouver l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $x = 1$.*

Solution 17 *Rappelons que si une fonction f est dérivable en a, la tangente à sa courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation (Définition 4.3 du cours 4 [2])*

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

La dérivée de f est $f'(x) = 2x$ (Exemple 4.1 du cours 4 [2]). En particulier, $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$. L'équation de la tangente est donc

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x - 1) + f(1) \\ &= 2(x - 1) + 1 = 2x - 1. \end{aligned}$$

Exercice 18 *Trouver l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ au point d'abscisse $x = 2$.*

Solution 18 *La fonction f est rationnelle, dérivable sur $]1, +\infty[$ (Théorème 4.3 (iv) du cours 4 [2]), qui contient 2, et*

$$f'(x) = \frac{(x - 1)(1) - (x + 1)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}.$$

En particulier,

$$f'(2) = \frac{-2}{(2 - 1)^2} = -2.$$

La valeur de la fonction f au point $x = 2$ est :

$$f(2) = \frac{2 + 1}{2 - 1} = 3.$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 2$ est (Définition 4.3 du cours 4 [2]) :

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x - 2) + f(2) \\ &= -2(x - 2) + 3 = -2x + 7. \end{aligned}$$

Exercice 19 *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction* $g(x) = \sqrt{x}$ *au point d'abscisse* $x = 4$.

Solution 19 *La fonction* g *est dérivable sur* $]0, +\infty[$, *qui contient* 4, *et* $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Donc* $g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, *et* $g(4) = 2$. *L'équation de la tangente est donc (Définition 4.3 du cours 4 [2])*

$$\begin{aligned} y &= g'(4)\,(x-4) + g\,(4) \\ &= \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x + 1. \end{aligned}$$

5 Application de la dérivée pour calculer une limite

Exercice 20 *Calculer*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^7 - 1}{x - 1},$$

en utilisant la définition de la dérivée.

Solution 20 *Soit*

$$g(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1}.$$

Considérons la fonction $f(x) = x^7$. *Alors, pour* $x \neq 1$, $g(x)$ *est le taux de variation de* f *entre* 1 *et* x *:*

$$g(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1},$$

où $f(1) = 1^7 = 1$. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $f'\,(x) = 7x^6$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Par la Définition 4.1 du cours 4 [2],*

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 7.$$

Exercice 21 *Calculer*

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4},$$

en utilisant la définition de la dérivée.

Solution 21 *Soit*

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}.$$

Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. *Alors, pour* $x \geq 0$, $x \neq 4$, $h(x)$ *est le taux de variation de* f *entre* 4 *et* x *:*

$$h(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{f(x) - f(4)}{x - 4},$$

où $f(4) = \sqrt{4} = 2$. *La fonction* f *est dérivable en* $4 > 0$, *avec* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Par la Définition 4.1 du cours 4 [2],*

$$\lim_{x\to 4} h(x) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{1}{4}.$$

Exercice 22 *Montrer que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

en utilisant la définition de la dérivée.

Solution 22 *Soit*

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Considérons la fonction $f(x) = \sin(x)$. *Alors, pour* $x \neq 0$, $g(x)$ *est le taux de variation de* f *entre* 0 *et* x *:*

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

où $f(0) = \sin(0) = 0$. *La fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $f'(x) = \cos(x)$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2], dérivée admise et étudiée dans le cours 11 [4]), donc* $f'(0) = \cos(0) = 1$. *Par la Définition 4.1 du cours 4 [2],*

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1.$$

La dérivée du sinus étant admise, cet exercice montre que cette limite en découle ; il ne la démontre pas indépendamment.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.