Exercices type Bac & Solutions : Fonction logarithme

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 5.2 du cours 5* désigne un énoncé numéroté du cours 5 [3], et un renvoi comme *Théorème 2.4 du cours 2* ou *Définition 4.1 du cours 4* un énoncé des cours sur la limite d'une fonction [1] et sur la dérivation [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition du logarithme **1**

2 Propriétés du logarithme **2**

3 Limites du logarithme **4**

4 Logarithme en base 10 **5**

1 Définition du logarithme

Exercice 1 *Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de la fonction* $g(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$. *Calculer sa dérivée.*

Solution 1 *Notons d'abord que*

$$x^2 - 2x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 3 = (x-1)^2 + 3,$$

ce qui est strictement positif pour tout réel x. *Donc* $g(x)$ *est défini pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Pour la dérivabilité et la dérivée, nous utilisons la dérivée de $\ln u$ *(Théorème 5.3 du cours 5 [3]) : si* u *est dérivable sur un intervalle* I *et* $u(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$, *alors* $\ln(u(x))$ *est dérivable sur* I, *de dérivée* $\frac{u'(x)}{u(x)}$. *Ici,* $u(x) = x^2 - 2x + 4$ *est un polynôme, dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2])*

$$u'(x) = 2x - 2,$$

et $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x-2}{x^2-2x+4}.$$

Exercice 2 *Résoudre l'équation $\ln(x^2) = \ln(2x-2)$.*

Solution 2 *Pour que l'équation soit définie, les arguments du logarithme doivent être strictement positifs. Ainsi, nous devons avoir $x^2 > 0$ et $2x-2 > 0$. La première condition est vraie pour tout $x \neq 0$ et la seconde donne $x > 1$. Par conséquent, le domaine de l'équation est $]1, +\infty[$.*

Pour $x > 1$, les deux arguments sont strictement positifs, et deux logarithmes sont égaux si et seulement si leurs arguments sont égaux (Théorème 5.1 du cours 5 [3]). Ainsi, sur ce domaine, l'équation $\ln(x^2) = \ln(2x-2)$ est équivalente à l'équation $x^2 = 2x-2$. Résolvons cette équation du second degré :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ (x-1)^2 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

ce qui est impossible, car $(x-1)^2 + 1 \geq 1$. L'ensemble des solutions est donc $S = \emptyset$.

Exercice 3 *Résoudre l'inéquation $\ln(x^2) > \ln(2x-1)$.*

Solution 3 *Pour que l'inéquation soit définie, les arguments du logarithme doivent être strictement positifs. Ainsi, nous devons avoir $x^2 > 0$ et $2x-1 > 0$. La première condition est vraie pour tout $x \neq 0$ et la seconde donne $x > \frac{1}{2}$. Par conséquent, le domaine de l'inéquation est $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.*

Pour $x > \frac{1}{2}$, la fonction logarithme étant strictement croissante (Théorème 5.1 du cours 5 [3]), l'inéquation $\ln(x^2) > \ln(2x-1)$ est équivalente à l'inéquation $x^2 > 2x-1$. Résolvons cette inéquation du second degré :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &> 0 \\ (x-1)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Un carré est strictement positif sauf s'il est nul : $(x-1)^2 > 0$ si et seulement si $x \neq 1$. Donc, sur le domaine, la solution de l'inéquation est $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[$. L'ensemble des solutions est donc

$$S = \left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup]1, +\infty[.$$

2 Propriétés du logarithme

Exercice 4 *Soient a et b deux réels strictement positifs. Simplifier l'expression*

$$\ln(a^3 b^2).$$

Solution 4 *En utilisant les propriétés du logarithme (Théorème 5.2 du cours 5 [3]), notamment que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs et que le logarithme d'une puissance est égal à l'exposant multiplié par le logarithme de la base, nous pouvons simplifier l'expression comme suit, car $a^3 > 0$ et $b^2 > 0$:*

$$\begin{aligned} \ln(a^3b^2) &= \ln(a^3) + \ln(b^2) && \textit{(propriété du produit)} \\ &= 3\ln(a) + 2\ln(b) && \textit{(propriété de la puissance).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression simplifiée est $3\ln(a) + 2\ln(b)$.

Exercice 5 *Soient a et b deux réels strictement positifs. Simplifier l'expression*

$$\ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right).$$

Solution 5 *En utilisant les propriétés du logarithme (Théorème 5.2 du cours 5 [3]), notamment que le logarithme d'un quotient est égal à la différence des logarithmes du numérateur et du dénominateur, et que le logarithme d'une puissance est égal à l'exposant multiplié par le logarithme de la base, nous pouvons simplifier l'expression comme suit, car $a^5 > 0$ et $b^3 > 0$:*

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a^5}{b^3}\right) &= \ln(a^5) - \ln(b^3) && \textit{(propriété du quotient)} \\ &= 5\ln(a) - 3\ln(b) && \textit{(propriété de la puissance).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression simplifiée est $5\ln(a) - 3\ln(b)$.

Exercice 6 *Soient a et b deux réels strictement positifs. Simplifier l'expression*

$$\ln(\sqrt{ab}).$$

Solution 6 *En utilisant les propriétés du logarithme (Théorème 5.2 du cours 5 [3]), notamment que le logarithme d'une racine carrée est égal à la moitié du logarithme de l'argument, et que le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes des facteurs, nous pouvons simplifier l'expression comme suit, car $ab > 0$:*

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{ab}) &= \frac{1}{2}\ln(ab) && \textit{(propriété de la racine carrée)} \\ &= \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) && \textit{(propriété du produit)} \\ &= \frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b). \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression simplifiée est $\frac{1}{2}\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b)$.

3 Limites du logarithme

Exercice 7 *Calculer la limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

Solution 7 *C'est une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$. *Pour calculer cette limite, nous allons utiliser les croissances comparées (Théorème 5.5 du cours 5 [3]), qui portent sur* x^n *avec* n *entier. Pour nous y ramener, nous écrivons, pour* $x > 0$ *(Théorème 5.2 du cours 5 [3]) :*

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}} = 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\frac{\ln(y)}{y},$$

où nous avons noté $y = \sqrt{x}$. *Quand* x *tend vers* $+\infty$, y *tend vers* $+\infty$, *et* $\frac{\ln(y)}{y}$ *tend vers* 0 *(Théorème 5.5 du cours 5 [3] avec* $n = 1$*). Par la limite d'une fonction composée (Théorème 2.4 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{y\to+\infty} 2\frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

Exercice 8 *Calculer la limite*

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x).$$

Solution 8 *C'est une forme indéterminée* $0\times(-\infty)$. *Pour calculer cette limite, nous allons utiliser les croissances comparées (Théorème 5.5 du cours 5 [3]). Pour nous y ramener, nous écrivons, pour* $x > 0$ *(Théorème 5.2 du cours 5 [3]) :*

$$\sqrt{x}\ln(x) = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x}^2) = 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 2y\ln(y),$$

où nous avons noté $y = \sqrt{x}$. *Quand* x *tend vers* 0^+, y *tend vers* 0^+ *en restant strictement positif, et* $y\ln(y)$ *tend vers* 0 *(Théorème 5.5 du cours 5 [3] avec* $n = 1$*). Par la limite d'une fonction composée (Théorème 2.4 du cours 2 [1]),*

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x) = \lim_{y\to0^+} 2y\ln(y) = 0.$$

Exercice 9 *Calculer la limite*

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Solution 9 *Soit, pour* $x > 0$, $x \neq 1$,

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}.$$

Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$. *Alors* $g(x)$ *est le taux de variation de* f *entre* 1 *et* x *:*

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1},$$

où $f(1) = \ln(1) = 0$. *En appliquant la définition du nombre dérivé au point* $x = 1$ *(Définition 4.1 du cours 4 [2]), nous obtenons :*

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1).$$

Puisque $f(x) = \ln(x)$, *alors* $f'(x) = \frac{1}{x}$ *(Définition 5.1 du cours 5 [3]) et, en particulier,* $f'(1) = 1$. *Par conséquent :*

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$$

4 Logarithme en base 10

Exercice 10 *Calculer* $\log_{10}(1000)$.

Solution 10 *On a* $1000 = 10^3$, *donc, par la définition du logarithme en base* 10 *(Définition 5.3 du cours 5) et la propriété de la puissance (Théorème 5.2 du cours 5 [3]),*

$$\log_{10}(1000) = \frac{\ln(10^3)}{\ln(10)} = \frac{3\ln(10)}{\ln(10)} = 3.$$

Exercice 11 *Exprimer* $\log_{10}(x^2)$ *en fonction de* $\ln(x)$, *pour* $x > 0$.

Solution 11 *Pour* $x > 0$, *on a (Définition 5.3 et Théorème 5.2 du cours 5 [3])*

$$\log_{10}(x^2) = \frac{\ln(x^2)}{\ln(10)} = \frac{2}{\ln(10)}\ln(x).$$

Pour $x < 0$, $\log_{10}(x^2)$ *est encore défini, mais* $\ln(x)$ *ne l'est pas ; on a alors* $\log_{10}(x^2) = \frac{2}{\ln(10)}\ln(|x|)$.

Exercice 12 *Résoudre l'équation* $\log_{10}(5x-20) = 2$.

Solution 12 *Le domaine de l'équation est donné par* $5x - 20 > 0$, *soit* $x > 4$. *Pour* $x > 4$, *comme* $2 = \log_{10}(10^2) = \log_{10}(100)$ *(Théorème 5.7 du cours 5), l'équation est équivalente à* $\log_{10}(5x-20) = \log_{10}(100)$, *c'est-à-dire à* $5x - 20 = 100$ *(Théorème 5.7 du cours 5 [3]), donc* $x = \frac{120}{5} = 24$. *Comme* $24 > 4$, *l'ensemble des solutions est* $S = \{24\}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.