Exercices type Bac & Solutions : Fonction exponentielle

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 6.6 du cours 6* désigne un énoncé numéroté du cours 6 [4], et un renvoi comme *Théorème 2.3 du cours 2*, *Théorème 4.2 du cours 4* ou *Théorème 5.2 du cours 5* un énoncé des cours sur la limite d'une fonction [1], sur la dérivation [2] et sur la fonction logarithme [3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition de la fonction exponentielle **1**

2 Propriétés de la fonction exponentielle **2**

3 Limites de la fonction exponentielle **4**

4 Relation de la fonction exponentielle avec le logarithme **5**

1 Définition de la fonction exponentielle

Exercice 1 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = e^{x^2+3x-4}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Solution 1 *Nous écrivons*

$$f(x) = e^{u(x)},$$

où $u(x) = x^2+3x-4$ *est un polynôme, dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $u'(x) = 2x+3$ *(Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]). Par la dérivée de* e^u *(Théorème 6.6 du cours 6 [4]), qui découle de la règle de dérivation des fonctions composées (Théorème 4.4 du cours 4 [2]),* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = (2x+3)e^{x^2+3x-4}.$$

Exercice 2 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ *pour* $x \in]0, +\infty[$.

Solution 2 *Nous écrivons*

$$f(x) = e^{u(x)},$$

où $u(x) = \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $]0, +\infty[$, *de dérivée* $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Par le Théorème 6.6 du cours 6 [4],* f *est dérivable sur* $]0, +\infty[$, *et*

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 3 *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = e^{x^3}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

Solution 3 *Nous écrivons*

$$f(x) = e^{u(x)},$$

où $u(x) = x^3$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $u'(x) = 3x^2$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]). Par le Théorème 6.6 du cours 6 [4],* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} = 3x^2 e^{x^3}.$$

2 Propriétés de la fonction exponentielle

Exercice 4 *Simplifier les expressions suivantes comportant des exponentielles :*

$$\frac{(e^x)^3}{e^{2x}}, \quad \frac{e^{5x} \times e^{3x}}{e^{2x}}, \quad e^{7x} \times e^{-3x}, \quad \left(\frac{e^{4x}}{e^x}\right)^2.$$

Solution 4 *Nous utilisons les règles de calcul du Théorème 6.2 du cours 6 [4] :*

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \qquad (e^x)^n = e^{nx} \ (n \text{ entier}).$$

1. $$\frac{(e^x)^3}{e^{2x}} = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} = e^{3x-2x} = e^x.$$

2. $$\frac{e^{5x} \times e^{3x}}{e^{2x}} = e^{(5x+3x)-2x} = e^{6x}.$$

3. $$e^{7x} \times e^{-3x} = e^{7x-3x} = e^{4x}.$$

4. $$\left(\frac{e^{4x}}{e^x}\right)^2 = \left(e^{4x-x}\right)^2 = e^{6x}.$$

Exercice 5 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$e^{3x} - e^x = 0.$$

Solution 5 *Comme* $e^{3x} = e^x e^{2x}$ *(Théorème 6.2 du cours 6 [4]), factorisons l'équation :*

$$e^x(e^{2x} - 1) = 0.$$

Pour que le produit soit nul, au moins un des facteurs doit être nul. Analysons chaque facteur :

1. $e^x = 0$ *n'a pas de solution, car la fonction exponentielle est strictement positive (Théorème 6.1 du cours 6 [4]).*
2. $e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *car* $e^0 = 1$ *et* $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ *(Théorèmes 6.1 et 6.5 du cours 6 [4]).*

La seule solution de l'équation initiale est donc $x = 0$.

Exercice 6 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$e^{2x-1} = e^{x^2-6}.$$

Solution 6 *Comme* $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ *(Théorème 6.5 du cours 6 [4]), l'équation est équivalente à*

$$2x - 1 = x^2 - 6.$$

Réorganisons les termes pour obtenir une équation du second degré :

$$x^2 - 2x - 5 = 0.$$

Utilisons la formule du discriminant pour résoudre cette équation :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

où $a = 1$, $b = -2$, *et* $c = -5$. *Calculons le discriminant :*

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 4 + 20 = 24 > 0.$$

Les solutions sont donc

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}.$$

Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$x = 1 + \sqrt{6} \quad et \quad x = 1 - \sqrt{6}.$$

Exercice 7 *Résoudre l'inéquation suivante dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$e^{2x-1} > e^{x^2-1}.$$

Solution 7 *Comme la fonction exponentielle est strictement croissante,* $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$ *(Théorème 6.5 du cours 6 [4]). Ainsi :*

$$\begin{aligned} e^{2x-1} > e^{x^2-1} &\Leftrightarrow 2x-1 > x^2-1 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x < 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-2) < 0. \end{aligned}$$

Le produit $x(x-2)$ *est strictement négatif lorsque* x *est strictement compris entre les racines* 0 *et* 2 *du trinôme* $x(x-2)$*. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation initiale est*

$$S =]0, 2[\,.$$

3 Limites de la fonction exponentielle

Exercice 8 *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}.$$

Solution 8 *On a* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *(Théorème 6.8 du cours 6 [4]). Donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ *est une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$ *(Théorème 2.3 du cours 2 [1]). Mais, par les croissances comparées (Théorème 6.9 du cours 6 [4] avec* $n = 1$*), on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

On dit que e^x *l'emporte sur* x *quand* $x \to +\infty$ *; plus généralement,* e^x *l'emporte sur toute puissance* x^n*,* $n \geq 1$*.*

Exercice 9 *Calculer*

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x.$$

Solution 9 *On a* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ *(Théorème 6.8 du cours 6 [4]) et* $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$*. Donc* $\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x$ *est une forme indéterminée* $\infty \times 0$ *(Théorème 2.2 du cours 2 [1]). Mais, par les croissances comparées (Théorème 6.9 du cours 6 [4] avec* $n = 2$*), on a*

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0.$$

Exercice 10 *Calculer*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+2x+3}.$$

Solution 10 *On a* $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ *(Théorème 6.8 du cours 6 [4]). Donc* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+2x+3}$ *est une forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$*. Pour* $x > 0$*, on factorise le dénominateur par* x^2 *:*

$$\frac{e^x}{x^2+2x+3} = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

Or $\frac{e^x}{x^2} \to +\infty$ *(Théorème 6.9 du cours 6 [4] avec* $n = 2$*) et* $\frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} \to 1$ *(Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 du cours 2 [1]). Donc, par le Théorème 2.2 du cours 2 [1],*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+2x+3} = +\infty.$$

4 Relation de la fonction exponentielle avec le logarithme

Exercice 11 *Simplifier* $e^{3\ln(x)-\ln\left(x^2\right)}$ *et calculer* $\ln(e^3)$ *et* $e^{\ln(5)}$.

Solution 11 *L'expression* $e^{3\ln(x)-\ln\left(x^2\right)}$ *n'a de sens que pour* $x > 0$*, où* $\ln(x)$ *est défini. Pour* $x > 0$*, nous utilisons d'abord le fait que* $\ln\left(x^2\right) = 2\ln(x)$ *(Théorème 5.2 du cours 5 [3]) :*

$$e^{3\ln(x)-\ln\left(x^2\right)} = e^{3\ln(x)-2\ln(x)} = e^{\ln(x)} = x,$$

car $e^{\ln(y)} = y$ *pour tout* $y > 0$ *(Théorème 6.1 du cours 6 [4]) : l'exponentielle est la fonction réciproque du logarithme.*

Par le même théorème, $\ln(e^x) = x$ *pour tout réel* x *et* $e^{\ln(y)} = y$ *pour tout* $y > 0$*, donc*

$$\ln(e^3) = 3, \quad e^{\ln(5)} = 5.$$

Exercice 12 *Résoudre l'équation* $e^{2x-5} = 7$.

Solution 12 *Comme* $7 > 0$*, par le Théorème 6.10 du cours 6 [4],* $e^{2x-5} = 7 \Leftrightarrow 2x - 5 = \ln(7)$*, c'est-à-dire qu'on prend le logarithme népérien des deux membres de l'équation. Donc* $x = \frac{\ln(7)+5}{2}$*, et* $S = \left\{\frac{\ln(7)+5}{2}\right\}$.

Exercice 13 *Résoudre l'équation* $\ln(3x-2) = 5$.

Solution 13 *Le domaine de l'équation est donné par* $3x - 2 > 0$*, soit* $x > \frac{2}{3}$*. Pour* $x > \frac{2}{3}$*, comme* $3x-2 > 0$*, par le Théorème 6.1 du cours 6 [4],* $\ln(3x-2) = 5 \Leftrightarrow 3x - 2 = e^5$*, c'est-à-dire qu'on prend l'exponentielle des deux membres de l'équation. Donc* $x = \frac{e^5+2}{3}$*. Comme* $e^5 > 0$*, on a* $\frac{e^5+2}{3} > \frac{2}{3}$ *: cette solution est dans le domaine, et* $S = \left\{\frac{e^5+2}{3}\right\}$.

Exercice 14 *Résoudre l'équation suivante dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$3e^{2x} - 7e^x + 2 = 0.$$

Indication *: poser* $u = e^x$ *et résoudre l'équation en* u.

Solution 14 *Posons $u = e^x$, avec $u > 0$ (Théorème 6.1 du cours 6 [4]). Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = u^2$ (Théorème 6.2 du cours 6 [4]), l'équation devient*

$$3u^2 - 7u + 2 = 0.$$

Cette équation du second degré se résout par la formule du discriminant :

$$u = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

où $a = 3$, $b = -7$ et $c = 2$. Calculons le discriminant :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25.$$

Les racines sont donc

$$u_1 = \frac{7+5}{6} = 2, \quad u_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}.$$

Elles sont toutes deux strictement positives, donc elles conviennent. Revenons à la variable x (Théorème 6.10 du cours 6 [4]) :

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2),$$

$$e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)$$

(Théorème 5.2 du cours 5 [3]). Les solutions de l'équation initiale sont donc

$$x = \ln(2) \quad \text{et} \quad x = -\ln(3).$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.