Exercices type Bac & Solutions : Probabilité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 7.2 du cours 7* désigne un énoncé numéroté du cours 7 [1], et un renvoi au *cours 17*, le cours sur le dénombrement [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition d'une probabilité **1**

2 Propriétés d'une probabilité **2**
2.1 Probabilité uniforme (ou équiprobable) 2
2.2 Événements indépendants 3

3 Probabilité conditionnelle **3**
3.1 Probabilités composées et formule de Bayes 3
3.2 Formule des probabilités totales 4
3.3 Arbre des probabilités 4

1 Définition d'une probabilité

Exercice 1 *Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'univers d'un lancer de dé équilibré. Déterminer la probabilité de l'événement $A = \{2, 4, 6\}$.*

Solution 1 *Le dé étant équilibré, on munit Ω de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 *Un sac contient 5 billes rouges et 7 billes bleues. On tire une bille au hasard. Quelle est la probabilité de tirer une bille rouge ?*

Solution 2 *L'univers Ω est l'ensemble des $5+7=12$ billes, muni de la probabilité uniforme, car la bille est tirée au hasard (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). L'événement* la bille est rouge *contient 5 issues, donc, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{rouge}) = \frac{5}{12}.$$

Exercice 3 *On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir un double six ?*

Solution 3 *On prend pour univers l'ensemble $\Omega = \{1,\dots,6\}^2$ des couples (résultat du premier dé, résultat du second), qui a 36 éléments, muni de la probabilité uniforme, comme dans l'Exemple 7.8 du cours 7 [1]. L'événement* double six *est $\{(6,6)\}$, donc, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{double six}) = \frac{1}{36}.$$

2 Propriétés d'une probabilité

2.1 Probabilité uniforme (ou équiprobable)

Exercice 4 *Une urne contient 3 billes vertes, 2 billes jaunes et 5 billes rouges. On tire une bille au hasard. Calculer la probabilité de tirer une bille verte.*

Solution 4 *L'univers est l'ensemble des $3+2+5=10$ billes, muni de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{verte}) = \frac{3}{10}.$$

Exercice 5 *On lance un dé équilibré à 8 faces numérotées de 1 à 8. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?*

Solution 5 *On munit $\Omega = \{1,\dots,8\}$ de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). L'événement* nombre pair *est $\{2,4,6,8\}$, qui a 4 éléments, donc, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{pair}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6 *Une carte est tirée au hasard d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un as ou un roi ?*

Solution 6 *L'univers est l'ensemble des 52 cartes, muni de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Le jeu contient 4 as et 4 rois, donc, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1], $\mathbf{P}(\textit{as}) = \mathbf{P}(\textit{roi}) = \frac{4}{52}$. Une carte ne peut pas être à la fois un as et un roi : les deux événements sont incompatibles, et, par le Théorème 7.1 (iii) du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{as ou roi}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}.$$

2.2 Événements indépendants

Exercice 7 *Deux dés équilibrés sont lancés. Calculer la probabilité d'obtenir un 4 sur le premier dé et un 3 sur le second dé.*

Solution 7 *Soient A l'événement* le premier dé donne 4 *et B l'événement* le second dé donne 3. *Les deux lancers n'influent pas l'un sur l'autre : on les modélise par des événements indépendants (Remarque 7.4 du cours 7 [1]). Chaque dé étant équilibré, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6}$ (Remarque 7.2 et Théorème 7.2 du cours 7), et, par la Définition 7.6 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

On retrouve ce résultat avec l'univers des 36 couples muni de la probabilité uniforme (Exemple 7.8 du cours 7 [1]), où $A \cap B = \{(4,3)\}$.

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Probabilités composées et formule de Bayes

Exercice 8 *On tire au hasard deux cartes successivement d'un jeu de 52 cartes, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir un as puis un roi.*

Solution 8 *Notons A_1 l'événement* la première carte est un as *et R_2 l'événement* la seconde carte est un roi. *La première carte est tirée au hasard parmi 52, dont 4 as : $\mathbf{P}(A_1) = \frac{4}{52} > 0$ (Théorème 7.2 du cours 7 [1]). Sachant A_1, il reste 51 cartes, dont 4 rois, et la seconde carte est tirée au hasard parmi elles : $\mathbf{P}(R_2 \mid A_1) = \frac{4}{51}$. Par le Théorème 7.4 (i) du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap R_2) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}(R_2 \mid A_1) = \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{16}{2652} = \frac{4}{663}.$$

Exercice 9 *Une urne contient 6 billes rouges et 4 billes noires. On tire au hasard deux billes simultanément. Quelle est la probabilité que les deux billes soient rouges ?*

Solution 9 *Les billes étant tirées simultanément, une issue est une paire de billes, sans ordre. L'univers Ω est l'ensemble des paires de billes de l'urne, muni de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Il y a 10×9 façons de choisir une première bille puis une seconde, et chaque paire est obtenue de deux façons : $\mathrm{Card}(\Omega) = \frac{10\times 9}{2} = 45$ (cours 17 [2]). De même, il y a $\frac{6\times 5}{2} = 15$ paires de billes rouges. Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}(\textit{deux rouges}) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

On obtient le même résultat en tirant les billes l'une après l'autre sans remise : $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$ (Théorème 7.4 (i) du cours 7 [1]).

Exercice 10 *Dans une population, 1 % des individus sont atteints d'une maladie. On choisit un individu au hasard, et on lui fait passer un test de dépistage. Soient M l'événement* l'individu est malade *et T l'événement* le test est positif. *Le test de dépistage a une sensibilité $\mathbf{P}(T \mid M) = 99\,\%$ et une spécificité $\mathbf{P}(\overline{T} \mid \overline{M}) = 95\,\%$, où $\overline{T}$ et $\overline{M}$ sont les événements contraires de T et M respectivement. Calculer la probabilité que cet individu soit malade sachant qu'il a été testé positif, $\mathbf{P}(M \mid T)$.*

Solution 10 *L'individu étant choisi au hasard, $\mathbf{P}(M) = 0{,}01$ (Théorème 7.2 du cours 7 [1]). D'après l'énoncé, $\mathbf{P}(T \mid M) = 0{,}99$ et $\mathbf{P}(\overline{T} \mid \overline{M}) = 0{,}95$. On en déduit $\mathbf{P}(\overline{M}) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$ (Théorème 7.1 (iv) du cours 7) et $\mathbf{P}(T \mid \overline{M}) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ (Théorème 7.3 du cours 7 [1]). Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de Ω, de probabilités strictement positives, et*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(T) &= \mathbf{P}(M)\,\mathbf{P}(T \mid M) + \mathbf{P}(\overline{M})\,\mathbf{P}(T \mid \overline{M}) \\ &= 0{,}01 \times 0{,}99 + 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}0594 > 0\end{aligned}$$

(Théorème 7.5 du cours 7 [1]). Par la formule de Bayes (Théorème 7.7 (ii) du cours 7 [1]),

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M \mid T) &= \frac{\mathbf{P}(M)\,\mathbf{P}(T \mid M)}{\mathbf{P}(M)\,\mathbf{P}(T \mid M) + \mathbf{P}(\overline{M})\,\mathbf{P}(T \mid \overline{M})} \\ &= \frac{0{,}0099}{0{,}0594} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667.\end{aligned}$$

Un individu testé positif n'a donc qu'une chance sur six d'être malade.

3.2 Formule des probabilités totales

Exercice 11 *Une boîte contient 3 billes rouges et 2 billes vertes. Une seconde boîte contient 4 billes rouges et 6 billes vertes. On choisit une boîte au hasard et on tire une bille au hasard dans cette boîte. Calculer la probabilité de tirer une bille rouge.*

Solution 11 *Soient B_1 l'événement* la première boîte est choisie *et B_2 l'événement* la seconde boîte est choisie. *Ils forment une partition de Ω, et, la boîte étant choisie au hasard, $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{2}$ (Remarque 7.2 et Théorème 7.2 du cours 7 [1]). La bille étant tirée au hasard dans la boîte choisie, $\mathbf{P}(\textit{rouge} \mid B_1) = \frac{3}{5}$ et $\mathbf{P}(\textit{rouge} \mid B_2) = \frac{4}{10}$. Par la formule des probabilités totales (Théorème 7.5 du cours 7 [1]),*

$$\mathbf{P}(\textit{rouge}) = \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}(\textit{rouge} \mid B_1) + \mathbf{P}(B_2)\,\mathbf{P}(\textit{rouge} \mid B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} = \frac{1}{2}.$$

3.3 Arbre des probabilités

Exercice 12 *Un test diagnostique a deux résultats possibles : positif ou négatif. La probabilité qu'une personne saine reçoive un résultat négatif est de 0,97. Si*

5 % de la population est malade, calculer la probabilité qu'une personne choisie au hasard soit saine et reçoive un résultat positif.

Solution 12 *Soient S l'événement* la personne est saine *et T l'événement* le résultat du test est positif. *D'après l'énoncé,* $\mathbf{P}(\overline{T} \mid S) = 0{,}97$ *et, la personne étant choisie au hasard,* $\mathbf{P}(\overline{S}) = 0{,}05$ *(Théorème 7.2 du cours 7 [1]). On construit un arbre des probabilités. Le premier niveau a deux branches, menant aux nœuds S et $\overline{S}$, de probabilités* $\mathbf{P}(S) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ *et* $\mathbf{P}(\overline{S}) = 0{,}05$ *(Théorème 7.6 (i) du cours 7 [1]). De chacun de ces nœuds partent deux branches, menant aux nœuds T et $\overline{T}$, qui portent les probabilités conditionnelles ; par exemple, la branche de S vers T porte* $\mathbf{P}(T \mid S) = 1 - \mathbf{P}(\overline{T} \mid S) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$ *(Théorème 7.6 (i) du cours 7 [1]). La probabilité cherchée est celle du chemin passant par S puis T, produit des probabilités de ses branches (Théorème 7.6 (ii) du cours 7 [1]) :*

$$\mathbf{P}(S \cap T) = \mathbf{P}(S) \times \mathbf{P}(T \mid S) = 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}0285.$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.