Exercices type Bac & Solutions : Fonction convexe

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 8.1 du cours 8* désigne un énoncé numéroté du cours 8 [4], et un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4*, un énoncé numéroté des cours sur la dérivée [1], le logarithme [2], l'exponentielle [3] ou les fonctions trigonométriques [5]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Définition d'une fonction convexe **1**

2 Caractérisation de la convexité d'une fonction **2**

3 Point d'inflexion **4**

1 Définition d'une fonction convexe

Exercice 1 *Montrer que la fonction*

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

Solution 1 *La fonction* f *est un polynôme : elle est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [1]), et*

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 3, \qquad f''(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, et* f *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *par le Théorème 8.1 du cours 8 [4].*

Exercice 2 *Vérifier la convexité de la fonction* $f(x) = e^{4x-1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Solution 2 *Par le Théorème 6.6 du cours 6 [3], appliqué avec* $u(x) = 4x - 1$, *la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f'(x) = 4e^{4x-1}.$$

Par le même théorème et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [1], f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$f''(x) = 16e^{4x-1}.$$

Comme $e^X > 0$ *pour tout réel* X *(Théorème 6.1 (i) du cours 6 [3]),* $f''(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc* f *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 8.1 du cours 8 [4]).*

Exercice 3 *Soit* $f(x) = \ln(x - 2)$ *pour* $x > 2$. *Démontrer que* f *est concave sur son domaine de définition* $]2, +\infty[$.

Solution 3 *Sur* $]2, +\infty[$, $u(x) = x - 2$ *est dérivable et strictement positive. Par le Théorème 5.3 du cours 5 [2],* f *est dérivable sur* $]2, +\infty[$, *et*

$$f'(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Comme $x - 2 \neq 0$ *sur* $]2, +\infty[$, *le Théorème 4.3 (iii) du cours 4 [1] montre que* f' *est dérivable sur cet intervalle, et*

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0$$

pour tout $x \in]2, +\infty[$. *Donc* f *est concave sur* $]2, +\infty[$ *(Corollaire 8.1 du cours 8 [4]).*

2 Caractérisation de la convexité d'une fonction

Exercice 4 *Soit* $f(x) = e^x$.

1. *Montrer que* f *est convexe sur* $\mathbb{R}$.
2. *Trouver l'équation de la tangente à la courbe de* f *au point d'abscisse* $a = 0$.
3. *En déduire que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq x + 1.$$

Solution 4

1. *On a* $f'(x) = e^x$ *et* $f''(x) = e^x > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *(Théorèmes 6.4 et 6.1 (i) du cours 6 [3]), donc* f *est convexe sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 8.1 du cours 8 [4]).*

2. *On calcule* $f(0) = e^0 = 1$ *et* $f'(0) = e^0 = 1$ *(Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [3]). L'équation de la tangente à la courbe de* f *au point d'abscisse* $a = 0$ *est (Définition 4.3 du cours 4 [1])*

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

3. *Comme* f *est convexe sur* $\mathbb{R}$*, sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes (Théorème 8.1 (iii) du cours 8 [4]) ; avec la tangente en* $a = 0$*, on obtient, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$e^x \geq x + 1.$$

Exercice 5 *Soit* $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. *Montrer que* f *est convexe sur* $]0, +\infty[$.
2. *En déduire que, pour tous* $a, b \in]0, +\infty[$*,*

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Solution 5

1. *Par le Théorème 4.2 du cours 4,* $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ *sur* $]0, +\infty[$ *; par le Théorème 4.3 (i) et (iii) du cours 4 [1],* f' *est dérivable sur* $]0, +\infty[$*, et* $f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} > 0$*. Donc* f *est convexe sur* $]0, +\infty[$ *(Théorème 8.1 du cours 8 [4]).*
2. *Soient* $a, b \in]0, +\infty[$*. Comme* f *est convexe sur* $]0, +\infty[$ *(question 1), la Définition 8.2 du cours 8 [4], appliquée avec* $t = \frac{1}{2}$*, donne*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}.$$

Les deux membres sont strictement positifs. Or, pour $0 < u \leq v$*, on a* $\frac{1}{v} \leq \frac{1}{u}$ *(on multiplie* $u \leq v$ *par* $\frac{1}{uv} > 0$*) : en passant aux inverses, on obtient*

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Exercice 6 *Soit* $f(x) = \ln(x)$.

1. *Montrer que f est concave sur $]0,+\infty[$.*

2. *En déduire que, pour tous $a,b\in]0,+\infty[$,*

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}.$$

Solution 6

1. *On a $f'(x)=\frac{1}{x}$ et $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ (Théorème 4.2 du cours 4 [1]), donc f est concave sur $]0,+\infty[$ (Corollaire 8.1 du cours 8 [4]).*

2. *Soient $a,b\in]0,+\infty[$. Comme f est concave sur $]0,+\infty[$, la Définition 8.2 du cours 8 [4], appliquée avec $t=\frac{1}{2}$, donne*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Par le Théorème 5.2 (i) et (iv) du cours 5 [2],

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{\ln(a)+\ln(b)}{2}=\frac{\ln(ab)}{2}=\ln\left(\sqrt{ab}\right).$$

Les réels $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$ sont strictement positifs, et la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (Théorème 5.1 (i) et (ii) du cours 5 [2]) : on en déduit $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

3 Point d'inflexion

Exercice 7 *Trouver les points d'inflexion de la courbe de la fonction $f(x)=x^3-3x^2+2x$.*

Solution 7 *La fonction f est un polynôme, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [1]) : $f'(x)=3x^2-6x+2$ et $f''(x)=6x-6=6(x-1)$. Ainsi $f''(x)<0$ pour $x<1$ et $f''(x)>0$ pour $x>1$: f'' change de signe en 1, qui n'est pas une borne de $\mathbb{R}$ (tout $h>0$ convient), et la courbe admet un point d'inflexion en $A(1,f(1))=A(1,0)$ (Définition 8.3 du cours 8 [4]). C'est le seul, car en un point d'inflexion d'abscisse a, $f''(a)=0$ (Remarque 8.2 du cours 8 [4]), et f'' ne s'annule qu'en 1.*

Exercice 8 *Soit $f(x)=\sin(x)$ pour $x\in]-\pi,3\pi[$. Identifier et caractériser les points d'inflexion de la courbe de f.*

Solution 8 *Par le Théorème 4.2 du cours 4 [1], $f'(x)=\cos(x)$ et $f''(x)=-\sin(x)$. La période 2π de la fonction $\sin$, son signe sur $]0,2\pi[$ et ses valeurs en 0 et en π (Théorèmes 11.1 (i), 11.4 (i) et 11.5 du cours 11 [5]) donnent : $\sin(x)>0$ pour $x\in]0,\pi[$ et pour $x\in]2\pi,3\pi[$, $\sin(x)<0$ pour $x\in]-\pi,0[$*

et pour $x \in]\pi, 2\pi[$*, et, sur* $]-\pi, 3\pi[$*,* $\sin(x) = 0$ *seulement pour* $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$*. D'où le tableau de signes de* $f'' = -\sin$ *:*

x	$-\pi$		0		π		2π		3π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Par le Théorème 8.1 et le Corollaire 8.1 du cours 8 [4], f *est convexe sur* $]-\pi, 0]$ *et sur* $[\pi, 2\pi]$*, concave sur* $[0, \pi]$ *et sur* $[2\pi, 3\pi[$*. La dérivée seconde change de signe en* 0*, en* π *et en* 2π*, qui ne sont pas des bornes de* $]-\pi, 3\pi[$ *; pour chacun de ces points* a*, le réel* $h = \pi$ *convient, car* $]a - \pi, a + \pi[\subset]-\pi, 3\pi[$*. La courbe admet donc trois points d'inflexion,* $(0, 0)$*,* $(\pi, 0)$ *et* $(2\pi, 0)$ *(Définition 8.3 du cours 8), où la convexité change et où la courbe traverse sa tangente (Théorème 8.2 du cours 8 [4]). Il n'y en a pas d'autre, car* f'' *ne s'annule pas ailleurs sur* $]-\pi, 3\pi[$ *(Remarque 8.2 du cours 8 [4]).*

Exercice 9 *Déterminer si la courbe de la fonction* $f(x) = \ln(x)$*, pour* $x > 0$*, possède des points d'inflexion.*

Solution 9 *On a* $f'(x) = \frac{1}{x}$ *et* $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ *pour* $x > 0$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [1]). La dérivée seconde ne s'annule donc jamais, alors qu'en un point d'inflexion d'abscisse* a*,* $f''(a) = 0$ *(Remarque 8.2 du cours 8 [4]) : la courbe de* f *n'a pas de point d'inflexion. La fonction* f *est d'ailleurs concave sur* $]0, +\infty[$ *tout entier (Corollaire 8.1 du cours 8 [4]).*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 8. Fonction convexe, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.