Exercices type Bac & Solutions : Primitive et intégrale

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 9.1 du cours 9* désigne un énoncé numéroté du cours 9 [5], et un renvoi comme *Théorème 4.5 du cours 4*, un énoncé numéroté des cours sur la continuité [1], la dérivée [2], le logarithme [3], l'exponentielle [4] ou les fonctions trigonométriques [6]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Primitive **1**
1.1 Définition de la primitive 1
1.2 Propriétés de la primitive 2

2 Intégrale **3**
2.1 Définition de l'intégrale 3
2.2 Propriétés de l'intégrale 4
2.3 Intégration par parties 5
2.4 Relation entre intégrale et aire 6
2.5 Relation entre intégrale et moyenne 7

1 Primitive

1.1 Définition de la primitive

Exercice 1 *Trouver une primitive de la fonction* $f(x) = 3x^2$.

Solution 1 *Par les Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9 [5], une primitive de*

$$f(x) = 3x^2$$

sur $\mathbb{R}$ *est* $3 \cdot \frac{x^3}{3} = x^3$. *Par le Théorème 9.1 du cours 9 [5], les primitives de* f *sur* $\mathbb{R}$ *sont*

$$F(x) = x^3 + C,$$

où C *est une constante.*

Exercice 2 *Déterminer une primitive de la fonction* $f(x) = \frac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

Solution 2 *Par le Théorème 9.2 du cours 9, une primitive de*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

sur $]0, +\infty[$ *est* $\ln(x)$*, et ses primitives sur cet intervalle sont (Théorème 9.1 du cours 9 [5])*

$$F(x) = \ln(x) + C,$$

où C *est une constante.*

Exercice 3 *Trouver une primitive de la fonction* $f(x) = e^x + \cos(x)$.

Solution 3 *Par les Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9, une primitive de*

$$f(x) = e^x + \cos(x)$$

sur $\mathbb{R}$ *est* $e^x + \sin(x)$*, et ses primitives sur* $\mathbb{R}$ *sont (Théorème 9.1 du cours 9 [5])*

$$F(x) = e^x + \sin(x) + C,$$

où C *est une constante.*

1.2 Propriétés de la primitive

Exercice 4 *Soient* F *et* G *deux primitives de la même fonction* f *sur un intervalle* I*. Montrer que* $F - G$ *est constante sur* I*.*

Solution 4 *Si* F *et* G *sont deux primitives de* f *sur* I*, alors*

$$F'(x) = G'(x) = f(x)$$

pour tout $x \in I$*. En conséquence, par le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2],*

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

pour tout $x \in I$*. Comme* I *est un intervalle, le Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [2] montre que* $F - G$ *est constante sur* I*. C'est l'un des deux sens du Théorème 9.1 du cours 9 [5].*

Exercice 5 *Vérifier que la dérivée de* $g(x) = x\ln(x) - x$, *pour* $x > 0$, *est* $g'(x) = \ln(x)$. *En déduire une primitive de la fonction* $f(x) = 2\sin(x) - 3\ln(x)$ *sur l'intervalle* $]0, +\infty[$.

Solution 5 *Par les Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2] (dérivée d'un produit),* g *est dérivable sur* $]0, +\infty[$ *et*

$$g'(x) = (x\ln(x))' - 1 = \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x).$$

Ainsi g *est une primitive de* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$, *et* $-\cos$ *est une primitive de* $\sin$ *(Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Par le Théorème 9.3 du cours 9, une primitive de*

$$f(x) = 2\sin(x) - 3\ln(x)$$

sur $]0, +\infty[$ *est* $-2\cos(x) - 3(x\ln(x) - x)$, *et ses primitives sur cet intervalle sont (Théorème 9.1 du cours 9 [5])*

$$F(x) = -2\cos(x) - 3x\ln(x) + 3x + C,$$

où C *est une constante.*

Exercice 6 *Soit* $f(x) = 2x$. *Trouver la primitive de* f *qui s'annule en* $x = 1$.

Solution 6 *Par les Théorèmes 9.2, 9.3 et 9.1 du cours 9 [5], les primitives de*

$$f(x) = 2x$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}$ *sont les fonctions*

$$F(x) = x^2 + C.$$

Pour trouver la constante C *telle que* $F(1) = 0$, *on remplace* x *par 1 :* $1^2 + C = 0$, *d'où* $C = -1$. *Par le Corollaire 9.1 du cours 9 [5], la primitive recherchée est unique ; c'est donc*

$$F(x) = x^2 - 1.$$

2 Intégrale

2.1 Définition de l'intégrale

Exercice 7 *Calculer l'intégrale* $\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Solution 7 *La fonction* $x \mapsto 2x+1$ *est un polynôme, continu sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]), de primitive* $x^2 + x$ *(Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9 [5]). Par la Définition 9.2 du cours 9 [5], on évalue cette primitive aux bornes de l'intégrale :*

$$\begin{aligned}\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2 + x\right]_1^4 \\ &= (4^2 + 4) - (1^2 + 1) \\ &= 16 + 4 - 1 - 1 = 18.\end{aligned}$$

Exercice 8 *Calculer l'intégrale* $\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution 8 *La fonction* sin *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1]), et une primitive de* $\sin(x)$ *est* $-\cos(x)$ *(Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Par le Théorème 11.5 du cours 11 [6],* $\cos(\pi) = -1$ *et* $\cos(0) = 1$ *; la Définition 9.2 du cours 9 [5] donne donc :*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= -(-1) - (-1) = 2.\end{aligned}$$

Exercice 9 *Vérifier que la dérivée de* $g(x) = x\ln(x) - x$*, pour* $x > 0$*, est* $g'(x) = \ln(x)$*. En déduire l'intégrale* $\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution 9 *Par les Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2] (dérivée d'un produit),* g *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et*

$$g'(x) = (x\ln(x))' - 1 = \left(\ln(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x).$$

Ainsi g *est une primitive sur* $]0,+\infty[$ *de* ln*, qui y est continue (Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1]). Comme* $\ln(e) = 1$ *(Définition 5.2 du cours 5) et* $\ln(1) = 0$ *(Définition 5.1 du cours 5 [3]), la Définition 9.2 du cours 9 [5] donne*

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^e g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [g(x)]_1^e \\ &= g(e) - g(1) \\ &= (e\ln(e) - e) - (1\ln(1) - 1) \\ &= 1.\end{aligned}$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

Exercice 10 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a,b]$*, avec* $a < b$*. Montrer que si* $f(x) \geq 0$ *pour tout* x *dans* $[a,b]$*, alors l'intégrale de* f *sur* $[a,b]$ *est égale à zéro si et seulement si* $f(x) = 0$ *pour tout* x *dans* $[a,b]$.

Solution 10 *Comme* f *est continue sur* $[a,b]$*, elle y admet une primitive* F *(Théorème 9.5 du cours 9), et* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ *(Définition 9.2 du cours 9 [5]).*

Supposons que $f(x) \geq 0$ *pour tout* x *dans* $[a,b]$*, et que l'intégrale de* f *sur* $[a,b]$ *soit nulle :* $F(b) = F(a)$*. Comme* $F'(x) = f(x) \geq 0$ *pour tout* x *dans* $[a,b]$*,* F *est croissante sur* $[a,b]$ *(Théorème 4.5 (i) du cours 4 [2]). Pour tout* $x \in [a,b]$*, on a donc* $F(a) \leq F(x) \leq F(b) = F(a)$ *:* F *est constante sur* $[a,b]$.

Ses taux de variation sont nuls, donc $f(x) = F'(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$ (Définition 4.1 du cours 4 [2]).

Inversement, supposons que $f(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$. La fonction nulle a pour primitive la fonction nulle (Théorème 9.2 du cours 9 [5], avec $k = 0$), donc :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à zéro.

En conclusion, l'intégrale de f sur $[a, b]$ est égale à zéro si et seulement si $f(x) = 0$ pour tout x dans $[a, b]$.

2.3 Intégration par parties

Exercice 11 *Calculer l'intégrale $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties.*

Solution 11 *Utilisons le Théorème 9.8 du cours 9 [5] avec $u'(x) = e^x$ et $v(x) = x$. On a alors $u(x) = e^x$ et $v'(x) = 1$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]), et u', v' sont continues sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 du cours 3 [1]). Une primitive de e^x est e^x (Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Comme $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ (Théorème 6.1 (iv) du cours 6 [4]), l'intégrale devient :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\
&= e - [e^x]_0^1 \\
&= e - e + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 12 *Calculer l'intégrale $\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant l'intégration par parties.*

Solution 12 *Utilisons le Théorème 9.8 du cours 9 [5] sur $]0, +\infty[$, avec $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$. Alors $u(x) = x$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$ (Théorème 4.2 du cours 4 [2]), et u', v' sont continues sur $]0, +\infty[$ (Théorème 3.1 du cours 3 [1]). Une primitive de 1 est x (Théorème 9.2 du cours 9 [5], avec $k = 1$). Comme $\ln(e) = 1$ et*

$\ln(1) = 0$ *(Définitions 5.2 et 5.1 du cours 5 [3]), l'intégrale devient :*

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= e - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x\\ &= e - [x]_1^e\\ &= e - e + 1 = 1.\end{aligned}$$

Exercice 13 *Calculer l'intégrale* $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$ *en utilisant l'intégration par parties.*

Solution 13 *Utilisons le Théorème 9.8 du cours 9 [5] avec* $u'(x) = \sin(x)$ *et* $v(x) = x$*. Alors* $u(x) = -\cos(x)$ *(Théorème 9.2 du cours 9 [5]) et* $v'(x) = 1$ *(Théorème 4.2 du cours 4 [2]) ;* u' *et* v' *sont continues sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 3.1 du cours 3 [1]). On a* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$*,* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ *et* $\sin(0) = 0$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [6]). Comme* cos *est continue, de primitive* sin *(Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1] et Théorème 9.2 du cours 9), le Théorème 9.8 du cours 9 puis la linéarité (Théorème 9.7 (i) du cours 9 [5]) donnent :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-x\cos(x)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\pi/2}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [\sin(x)]_0^{\pi/2}\\ &= \sin(\pi/2) = 1.\end{aligned}$$

2.4 Relation entre intégrale et aire

Exercice 14 *Calculer l'aire entre la courbe de la fonction* $f(x) = x^2$ *et l'axe des abscisses sur l'intervalle* $[0, 2]$*.*

Solution 14 *La fonction* f *est continue (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]) et positive sur* $[0, 2]$*, car* $x^2 \geq 0$*. Par les Théorèmes 9.9 et 9.2 du cours 9 [5], l'aire sous la courbe est donnée par l'intégrale de* f *sur l'intervalle :*

$$\begin{aligned}\mathit{Aire} &= \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2\\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}\ \textit{unités d'aire.}\end{aligned}$$

Exercice 15 *Trouver l'aire de la région comprise entre les courbes des fonctions* $f(x) = x^2$ *et* $g(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$.

Solution 15 *Les fonctions* f *et* g *sont continues sur* $[0, 1]$ *(Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]). Pour* $x \in [0, 1]$, $g(x) - f(x) = x(1 - x) \geq 0$, *car* $x \geq 0$ *et* $1 - x \geq 0$ *:* $f \leq g$ *sur* $[0, 1]$. *Par le Corollaire 9.3 et les Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9 [5], l'aire entre les deux courbes est l'intégrale de la différence des fonctions sur l'intervalle :*

$$\begin{aligned} \textit{Aire} &= \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6} \textit{ unité d'aire.} \end{aligned}$$

Exercice 16 *Calculer l'aire de la région située au-dessus de l'axe des abscisses et sous la courbe de la fonction* $f(x) = \sin(x)$ *sur l'intervalle* $[0, \pi]$.

Solution 16 *La fonction* sin *est continue sur* $\mathbb{R}$ *(Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1]). On a* $\sin(x) > 0$ *pour* $x \in]0, \pi[$ *(Théorème 11.4 (i) du cours 11 [6]) et* $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ *(Théorème 11.5 du cours 11), donc* $\sin(x) \geq 0$ *pour* $x \in [0, \pi]$. *Par le Théorème 9.9 du cours 9, l'aire sous la courbe de* f *et au-dessus de l'axe des abscisses sur* $[0, \pi]$ *est donnée par l'intégrale, calculée à l'aide de la primitive* $-\cos$ *de* sin *(Théorème 9.2 du cours 9 [5], voir aussi l'exercice 8) :*

$$\begin{aligned} \textit{Aire} &= \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 2 \textit{ unités d'aire.} \end{aligned}$$

2.5 Relation entre intégrale et moyenne

Exercice 17 *Calculer la valeur moyenne de la fonction* $f(x) = 2x + 3$ *sur l'intervalle* $[1, 4]$.

Solution 17 *Par la Définition 9.3 du cours 9 [5], la valeur moyenne d'une fonction* f *continue sur l'intervalle* $[a, b]$, *avec* $a < b$, *est*

$$\textit{Valeur moyenne} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $f(x) = 2x + 3$, *continue sur* $[1, 4]$ *(Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]), de*

primitive x^2+3x (Théorèmes 9.2 et 9.3 du cours 9 [5]), nous avons :

$$\begin{aligned}\textit{Valeur moyenne} &= \frac{1}{4-1}\int_1^4 (2x+3)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\left[x^2+3x\right]_1^4\\ &= \frac{1}{3}((16+12)-(1+3))\\ &= \frac{1}{3}(28-4)=8.\end{aligned}$$

Exercice 18 *Trouver la valeur moyenne de la fonction $f(x)=x^2$ sur l'intervalle $[0,3]$.*

Solution 18 *La fonction f est continue sur $[0,3]$ (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]). Par la Définition 9.3 et le Théorème 9.2 du cours 9 [5], la valeur moyenne de $f(x)=x^2$ sur $[0,3]$ est :*

$$\begin{aligned}\textit{Valeur moyenne} &= \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{3}-0\right)=3.\end{aligned}$$

Exercice 19 *Calculer la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\cos(x)$ sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$.*

Solution 19 *La fonction* cos *est continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1]), de primitive* sin *(Théorème 9.2 du cours 9 [5]). Comme $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ et $\sin(0)=0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [6]), la Définition 9.3 du cours 9 [5] donne pour valeur moyenne de $f(x)=\cos(x)$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$:*

$$\begin{aligned}\textit{Valeur moyenne} &= \frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right)=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.