Exercices type Bac & Solutions : Variable aléatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 10.1 du cours 10* désigne un énoncé numéroté du cours 10 [3], et un renvoi comme *Définition 7.1 du cours 7*, un énoncé numéroté du cours sur les probabilités [2]. Les cours sur la fonction exponentielle [1] et sur les fonctions trigonométriques [4] sont cités de même. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Variable aléatoire et loi **1**

2 Espérance et variance **2**
2.1 Espérance 2
2.2 Variance d'une variable aléatoire 3
2.3 Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire 4

3 Indépendance des variables aléatoires **5**

4 Loi de Bernoulli **6**

5 Loi binomiale **7**

6 Loi des grands nombres **7**
6.1 Inégalités de Markov et de Tchebychev 7
6.2 Inégalité de concentration et loi des grands nombres 8

1 Variable aléatoire et loi

Exercice 1 *Définir une variable aléatoire et donner un exemple simple.*

Solution 1 *Soit* $\mathbf{P}$ *une probabilité sur un univers fini* Ω *(Définition 7.1 du cours 7 [2]). Une variable aléatoire est une fonction* $X : \Omega \to \mathbb{R}$*, qui associe un nombre réel à chaque issue (Définition 10.1 du cours 10 [3]).*

Exemple : on lance un dé équilibré. L'univers est $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$*, muni de la probabilité uniforme (Définition 7.3 et Remarque 7.2 du cours 7 [2]), et* $X(\omega) = \omega$ *est le résultat du dé. Ses valeurs sont* $1, \ldots, 6$*, et* $\mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{6}$ *pour chacune d'elles (Théorème 7.2 du cours 7 [2]) : c'est la loi de* X *(Définition 10.2 du cours 10 [3]).*

Exercice 2 *Soit une expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie équilibrées. Définir la variable aléatoire* X *comptant le nombre de faces.*

Solution 2 *On note* F *pour face et* P *pour pile, et l'on prend pour univers l'ensemble des couples (résultat de la première pièce, résultat de la seconde) :*

$$\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}.$$

Les pièces étant équilibrées et les lancers indépendants, on munit Ω *de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 et Remarque 7.4 du cours 7, comme dans l'Exemple 7.8 du cours 7 [2]).*

La variable aléatoire X *associe à chaque couple son nombre de* F *(Définition 10.1 du cours 10 [3]) :*

$$X((P, P)) = 0, \quad X((P, F)) = X((F, P)) = 1, \quad X((F, F)) = 2.$$

Elle prend les valeurs 0*,* 1 *et* 2*, correspondant respectivement à aucune, une ou deux faces obtenues.*

Exercice 3 *Soit une expérience aléatoire où l'on tire au hasard une carte d'un jeu de 52 cartes. Définir la variable aléatoire* X *qui vaut 1 si la carte est un as et 0 sinon.*

Solution 3 *L'univers* Ω *est l'ensemble des 52 cartes, muni de la probabilité uniforme, car la carte est tirée au hasard (Remarque 7.2 du cours 7 [2]). La variable aléatoire* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *est définie par* $X(\omega) = 1$ *si la carte* ω *est un as, et* $X(\omega) = 0$ *sinon (Définition 10.1 du cours 10 [3]).*

Comme le jeu contient 4 as, $\mathbf{P}(X = 1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ *(Théorème 7.2 du cours 7), et* $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$ *(Théorème 7.1 (iv) du cours 7 [2]). Ainsi* X *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{13}$ *(Définition 10.6 du cours 10 [3]).*

2 Espérance et variance

2.1 Espérance

Exercice 4 *Calculer l'espérance de la variable aléatoire* X *définie dans l'exercice 2.*

Solution 4 *Avec l'univers de la solution de l'exercice 2,* $\{X = 0\} = \{(P, P)\}$*,* $\{X = 1\} = \{(P, F), (F, P)\}$ *et* $\{X = 2\} = \{(F, F)\}$*. Par le Théorème 7.2 du cours 7 [2], la loi de* X *est*

$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X = 2) = \frac{1}{4}.$$

Par la Définition 10.3 du cours 10 [3], l'espérance de X est

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \mathbf{P}(X=0) + 1 \times \mathbf{P}(X=1) + 2 \times \mathbf{P}(X=2) \\ &= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1.\end{aligned}$$

Exercice 5 *Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de probabilité*

$$\mathbf{P}(X=0) = 0{,}5, \quad \mathbf{P}(X=1) = 0{,}3, \quad \mathbf{P}(X=2) = 0{,}2.$$

Calculer l'espérance de X.

Solution 5 *Par la Définition 10.3 du cours 10 [3], l'espérance de X est*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 0 \times \mathbf{P}(X=0) + 1 \times \mathbf{P}(X=1) + 2 \times \mathbf{P}(X=2) \\ &= 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0{,}7.\end{aligned}$$

Exercice 6 *Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire une boule au hasard. Soit X la variable aléatoire qui vaut 5 si la boule est rouge et -2 si elle est verte. Calculer l'espérance de X.*

Solution 6 *L'univers est l'ensemble des 5 boules, muni de la probabilité uniforme, car la boule est tirée au hasard (Remarque 7.2 du cours 7 [2]). Par le Théorème 7.2 du cours 7 [2], la loi de X est*

$$\mathbf{P}(X=5) = \frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(X=-2) = \frac{2}{5}.$$

Par la Définition 10.3 du cours 10 [3], l'espérance de X est

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= 5 \times \mathbf{P}(X=5) + (-2) \times \mathbf{P}(X=-2) \\ &= 5 \times \frac{3}{5} + (-2) \times \frac{2}{5} = \frac{11}{5}.\end{aligned}$$

2.2 Variance d'une variable aléatoire

Exercice 7 *Calculer la variance de la variable aléatoire X définie dans l'exercice 2.*

Solution 7 *La loi de X a été déterminée dans la solution de l'exercice 4 :*

$$\mathbf{P}(X=0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{4},$$

et $\mathbf{E}[X] = 1$. Par le Théorème 10.4 du cours 10 [3],

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 0^2 \times \mathbf{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbf{P}(X=1) + 2^2 \times \mathbf{P}(X=2) \\ &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Par la formule de König-Huygens (Théorème 10.5 du cours 10 [3]), la variance de X est

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 8 *Calculer la variance de la variable aléatoire X définie dans l'exercice 5.*

Solution 8 *Rappelons la loi de X :*

$$\mathbf{P}(X=0)=0{,}5, \quad \mathbf{P}(X=1)=0{,}3, \quad \mathbf{P}(X=2)=0{,}2,$$

et $\mathbf{E}[X]=0{,}7$ *(exercice 5). Par le Théorème 10.4 du cours 10 [3],*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 0^2\times\mathbf{P}(X=0)+1^2\times\mathbf{P}(X=1)+2^2\times\mathbf{P}(X=2)\\ &= 0^2\times 0{,}5+1^2\times 0{,}3+2^2\times 0{,}2=1{,}1.\end{aligned}$$

Par le Théorème 10.5 du cours 10 [3], la variance de X est

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbf{E}[X^2]-\mathbf{E}[X]^2=1{,}1-0{,}7^2=0{,}61.$$

Exercice 9 *Calculer la variance de la variable aléatoire X définie dans l'exercice 6.*

Solution 9 *Rappelons la loi de X :*

$$\mathbf{P}(X=5)=\frac{3}{5}, \quad \mathbf{P}(X=-2)=\frac{2}{5},$$

et $\mathbf{E}[X]=\frac{11}{5}$ *(exercice 6). Par le Théorème 10.4 du cours 10 [3],*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= 5^2\times\mathbf{P}(X=5)+(-2)^2\times\mathbf{P}(X=-2)\\ &= 25\times\frac{3}{5}+4\times\frac{2}{5}=\frac{83}{5}.\end{aligned}$$

Par le Théorème 10.5 du cours 10 [3], la variance de X est

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbf{E}[X^2]-\mathbf{E}[X]^2=\frac{83}{5}-\left(\frac{11}{5}\right)^2=\frac{415-121}{25}=\frac{294}{25}.$$

2.3 Espérance d'une fonction d'une variable aléatoire

Exercice 10 *Soit X une variable aléatoire avec* $\mathbf{P}(X=1)=0{,}4$ *et* $\mathbf{P}(X=2)=0{,}6$. *Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y=X^2+3X$.*

Solution 10 *L'espérance est linéaire (Théorème 10.3 (i) du cours 10 [3]), donc*

$$\mathbf{E}[Y]=\mathbf{E}[X^2]+3\,\mathbf{E}[X].$$

Par le Théorème 10.4 du cours 10,

$$\mathbf{E}[X^2]=1^2\times 0{,}4+2^2\times 0{,}6=2{,}8,$$

et, par la Définition 10.3 du cours 10 [3], $\mathbf{E}[X]=1\times 0{,}4+2\times 0{,}6=1{,}6$, *d'où* $3\,\mathbf{E}[X]=4{,}8$. *Donc*

$$\mathbf{E}[Y]=2{,}8+4{,}8=7{,}6.$$

On le vérifie par le Théorème 10.4 du cours 10 [3] appliqué à $f(x)=x^2+3x$: $\mathbf{E}[Y]=f(1)\times 0{,}4+f(2)\times 0{,}6=4\times 0{,}4+10\times 0{,}6=7{,}6$.

Exercice 11 *Soit X une variable aléatoire avec $\mathbf{P}(X = -1) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(X = 0) = 0{,}2$ et $\mathbf{P}(X = 1) = 0{,}3$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = e^X$.*

Solution 11 *Par le Théorème 10.4 du cours 10 [3], appliqué à la fonction exponentielle, et comme $e^0 = 1$ et $e^{-1} = \frac{1}{e}$ (Théorèmes 6.1 (iv) et 6.2 (ii) du cours 6 [1]),*

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[e^X] = e^{-1} \times 0{,}5 + e^0 \times 0{,}2 + e^1 \times 0{,}3 = \frac{0{,}5}{e} + 0{,}2 + 0{,}3\, e.$$

Donc l'espérance de Y est environ 1,199.

Exercice 12 *Soit X une variable aléatoire avec $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X = \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \sin(X)$.*

Solution 12 *Par le Théorème 10.4 du cours 10 [3], appliqué à la fonction* sin, *et comme $\sin(0) = 0$ et $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Théorème 11.5 du cours 11 [4]),*

$$\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\sin(X)] = \frac{1}{2}\sin(0) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3 Indépendance des variables aléatoires

Exercice 13 *Définir l'indépendance de deux variables aléatoires et donner un exemple.*

Solution 13 *Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si, pour tous réels x et y, les événements $\{X = x\}$ et $\{Y = y\}$ sont indépendants (Définition 10.5 (i) du cours 10 [3], Définition 7.6 du cours 7 [2]), c'est-à-dire si*

$$\mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

Exemple : on lance deux dés équilibrés, avec l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme ; les résultats X et Y du premier et du second dé sont indépendants (Exemple 10.5 du cours 10 [3]).

Exercice 14 *Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y avec $\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 1) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(Y = 0) = 0{,}3$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = 0{,}7$. Calculer $\mathbf{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\})$.*

Solution 14 *Les variables X et Y étant indépendantes, la Définition 10.5 (i) du cours 10 [3] donne*

$$\mathbf{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1) = 0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35.$$

4 Loi de Bernoulli

Exercice 15 *Définir une variable aléatoire de Bernoulli et donner la formule de son espérance et de sa variance.*

Solution 15 *Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $\mathbf{P}(X=1)=p$ et $\mathbf{P}(X=0)=1-p$ (Définition 10.6 du cours 10 [3]). Son espérance est $\mathbf{E}[X]=p$ et sa variance est $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)$ (Théorème 10.8 du cours 10 [3]).*

Exemple : la variable X de l'exercice 3 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{13}$.

Exercice 16 *Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p=0{,}2$. Calculer la probabilité que $X=0$.*

Solution 16 *Par la Définition 10.6 du cours 10 [3], $\mathbf{P}(X=0)=1-p=1-0{,}2=0{,}8$.*

Exercice 17 *Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p=0{,}75$. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.*

Solution 17 *Par le Théorème 10.8 du cours 10 [3], $\mathbf{E}[X]=p=0{,}75$ et $\mathrm{Var}(X)=p(1-p)=0{,}75\times 0{,}25=0{,}1875$.*

Exercice 18 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p=0{,}6$. Calculer la probabilité que $X+Y=1$.*

Solution 18 *Par la Définition 10.6 du cours 10 [3], $\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}(Y=1)=0{,}6$ et $\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}(Y=0)=1-p=0{,}4$. Comme X et Y ne prennent que les valeurs 0 et 1, on a $X+Y=1$ si et seulement si l'une des deux variables vaut 1 et l'autre 0 :*

$$\{X+Y=1\}=(\{X=1\}\cap\{Y=0\})\cup(\{X=0\}\cap\{Y=1\}),$$

et ces deux événements sont incompatibles, car X ne peut valoir à la fois 1 et 0. Par le Théorème 7.1 (iii) du cours 7 [2], puis par la Définition 10.5 (i) du cours 10 [3],

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X+Y=1) &= \mathbf{P}(\{X=1\}\cap\{Y=0\})+\mathbf{P}(\{X=0\}\cap\{Y=1\})\\ &= \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=0)+\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)\\ &= 0{,}6\times 0{,}4+0{,}4\times 0{,}6=0{,}48.\end{aligned}$$

On le vérifie à l'aide du Théorème 10.10 du cours 10, par lequel $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(2;0{,}6)$, et la Définition 10.8 du cours 10 [3] donne $\binom{2}{1}\times 0{,}6\times 0{,}4=0{,}48$.

5 Loi binomiale

Exercice 19 *Définir la loi binomiale et donner la formule de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire qui la suit.*

Solution 19 *Soient $n \geq 1$ un entier et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ si elle prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ et si*

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots,n\}$$

(Définition 10.8 du cours 10 [3]). Son espérance est $\mathbf{E}[X] = np$ et sa variance est $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$ (Théorème 10.11 du cours 10 [3]).

C'est la loi du nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve dont le succès a la probabilité p, c'est-à-dire de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p (Théorème 10.10 du cours 10 [3]). Exemple : le nombre de 6 obtenus en lançant quatre fois un dé équilibré suit la loi $\mathcal{B}(4, \frac{1}{6})$ (Exemple 10.7 du cours 10 [3]).

Exercice 20 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}5$. Calculer $\mathbf{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.*

Solution 20 *Par le Théorème 10.11 du cours 10 [3], $\mathbf{E}[X] = np = 10 \times 0{,}5 = 5$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 2{,}5$.*

Exercice 21 *Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X=3)$ pour une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}6$.*

Solution 21 *Par la Définition 10.8 du cours 10, puis par la Définition 10.7 du cours 10 [3],*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=3) &= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^{5-3} \\
&= \frac{5!}{3! \times 2!} \times 0{,}6^3 \times 0{,}4^2 \\
&= 10 \times 0{,}216 \times 0{,}16 = 0{,}3456.
\end{aligned}$$

6 Loi des grands nombres

6.1 Inégalités de Markov et de Tchebychev

Exercice 22 *Énoncer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire positive X et un réel $a > 0$.*

Solution 22 *Si X est une variable aléatoire à valeurs positives et $a > 0$, alors (Théorème 10.12 du cours 10 [3])*

$$\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

L'hypothèse $X \geq 0$ est indispensable : l'inégalité est fausse, par exemple, pour une variable qui vaut -100 ou 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ chacun, et pour $a = 1$.

Exercice 23 *Soit X une variable aléatoire avec $\mathbf{E}[X] = 50$ et $\mathrm{Var}(X) = 25$. Utiliser l'inégalité de Tchebychev pour majorer la probabilité que X s'écarte de son espérance de plus de 10.*

Solution 23 *Par l'inégalité de Tchebychev (Théorème 10.13 du cours 10 [3]), avec $t = 10$,*

$$\mathbf{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = 0{,}25.$$

Comme $\{|X - 50| > 10\} \subset \{|X - 50| \geq 10\}$, le Théorème 7.1 (ii) du cours 7 [2] donne

$$\mathbf{P}(|X - 50| > 10) \leq \mathbf{P}(|X - 50| \geq 10) \leq 0{,}25.$$

Exercice 24 *Soit X une variable aléatoire avec $\mathbf{E}[X] = 100$ et $\mathrm{Var}(X) = 100$. Utiliser l'inégalité de Tchebychev pour minorer la probabilité $\mathbf{P}(80 < X < 120)$.*

Solution 24 *Pour toute issue,*

$$80 < X < 120 \Leftrightarrow -20 < X - 100 < 20 \Leftrightarrow |X - 100| < 20,$$

donc l'événement $\{80 < X < 120\}$ est le contraire de $\{|X - 100| \geq 20\}$. Par l'inégalité de Tchebychev (Théorème 10.13 du cours 10 [3]), avec $t = 20$,

$$\mathbf{P}(|X - 100| \geq 20) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{20^2} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4}.$$

Par le Théorème 7.1 (iv) du cours 7 [2],

$$\mathbf{P}(80 < X < 120) = 1 - \mathbf{P}(|X - 100| \geq 20) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

L'inégalité de Tchebychev donne ainsi une minoration de $\mathbf{P}(80 < X < 120)$, et non sa valeur.

6.2 Inégalité de concentration et loi des grands nombres

Exercice 25 *Un jeu de foire propose de lancer une pièce de monnaie équilibrée. Si le joueur obtient face, il gagne 1 euro, sinon il ne gagne rien. Le joueur décide de jouer 100 fois ; les lancers sont indépendants. Calculer l'espérance de la somme totale gagnée après ces 100 lancers, puis interpréter ce résultat à l'aide de la loi des grands nombres.*

Solution 25 *Pour $i = 1, \ldots, 100$, soit X_i le gain du joueur au i-ème lancer : $X_i = 1$ si le lancer donne face, et $X_i = 0$ sinon. La pièce étant équilibrée, on munit l'univers des résultats de chaque lancer, $\{P, F\}$ (P pour pile, F pour face), de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7), d'où $\mathbf{P}(X_i = 1) = 0{,}5$ (Théorème 7.2 du cours 7 [2]) : X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$*

(Définition 10.6 du cours 10), et $\mathbf{E}[X_i] = 0{,}5$ *(Théorème 10.8 du cours 10 [3]). La somme totale gagnée est* $S = X_1 + \cdots + X_{100}$ *; par la linéarité de l'espérance (Théorème 10.3 (i) du cours 10 [3]),*

$$\mathbf{E}[S] = \mathbf{E}[X_1] + \cdots + \mathbf{E}[X_{100}] = 100 \times 0{,}5 = 50 \text{ euros.}$$

Interprétation : les lancers étant indépendants, les X_i *le sont (Remarque 10.1 du cours 10 [3]), et le gain moyen par partie est la fréquence* $\frac{S}{100}$ *des faces. Par la loi des grands nombres (Corollaire 10.1 et Remarque 10.2 du cours 10 [3]), pour tout* $t > 0$*, la probabilité que le gain moyen par partie s'écarte de* 0,5 *euro d'au moins* t *tend vers* 0 *quand le nombre de parties tend vers* $+\infty$*. La loi ne garantit pas que le joueur gagne exactement, ni même environ, 50 euros sur 100 parties.*

Exercice 26 *Un dé équilibré à six faces est lancé 600 fois ; les lancers sont indépendants. Soit* N *le nombre de 6 obtenus.*

1. *Calculer l'espérance de* N*.*
2. *À l'aide de l'inégalité de concentration, majorer la probabilité que la fréquence* $\frac{N}{600}$ *des 6 s'écarte de* $\frac{1}{6}$ *d'au moins* 0,05*.*
3. *Que dit la loi des grands nombres quand le nombre de lancers augmente ?*

Solution 26 *Pour* $i = 1, \ldots, 600$*, soit* $X_i = 1$ *si le* i*-ème lancer donne 6, et* $X_i = 0$ *sinon. Le dé étant équilibré, on munit l'univers des résultats de chaque lancer,* $\{1, \ldots, 6\}$*, de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7), d'où* $\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{6}$ *(Théorème 7.2 du cours 7 [2]) :* X_i *suit la loi de Bernoulli de paramètre* $\frac{1}{6}$ *(Définition 10.6 du cours 10 [3]). Les lancers étant indépendants, les* X_i *le sont (Remarque 10.1 du cours 10), et* $N = X_1 + \cdots + X_{600}$ *suit la loi* $\mathcal{B}(600, \frac{1}{6})$ *(Théorème 10.10 du cours 10 [3]).*

1. *Par le Théorème 10.11 du cours 10 [3],* $\mathbf{E}[N] = 600 \times \frac{1}{6} = 100$*.*
2. *Par l'inégalité de concentration, sous la forme du Corollaire 10.1 du cours 10 (conséquence du Théorème 10.14 du cours 10 [3]), avec* $n = 600$*,* $p = \frac{1}{6}$ *et* $t = 0{,}05$*,*

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{N}{600} - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}05\right) \leq \frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{600 \times 0{,}05^2} = \frac{5/36}{1{,}5} = \frac{5}{54} \approx 0{,}093.$$

   Comme $600 \times 0{,}05 = 30$*, c'est aussi une majoration de la probabilité que* N *s'écarte de* 100 *d'au moins* 30*.*
3. *Par la loi des grands nombres (Corollaire 10.1 et Remarque 10.2 du cours 10 [3]), pour tout* $t > 0$*, la probabilité que la fréquence des 6 s'écarte de* $\frac{1}{6}$ *d'au moins* t *tend vers* 0 *quand le nombre de lancers tend vers* $+\infty$*. La loi ne dit pas que* N *vaut 100.*

Exercice 27 *Un étudiant répond à un QCM de 100 questions. Chaque question a 4 options de réponse, et une seule est correcte. L'étudiant répond au hasard à chaque question, indépendamment des autres. Calculer l'espérance du nombre de réponses correctes, puis interpréter ce résultat à l'aide de la loi des grands nombres.*

Solution 27 *Pour $i = 1, \ldots, 100$, soit $X_i = 1$ si la réponse à la question i est correcte, et $X_i = 0$ sinon. La réponse étant choisie au hasard parmi 4 options, on munit l'ensemble des 4 options de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7), d'où $\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{4}$ (Théorème 7.2 du cours 7 [2]) : X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{4}$ (Définition 10.6 du cours 10), et $\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{4}$ (Théorème 10.8 du cours 10 [3]). Le nombre de réponses correctes est $N = X_1 + \cdots + X_{100}$, et, par la linéarité de l'espérance (Théorème 10.3 (i) du cours 10 [3]),*

$$\mathbf{E}[N] = 100 \times \frac{1}{4} = 25.$$

Interprétation : les réponses étant indépendantes, les X_i le sont (Remarque 10.1 du cours 10 [3]). Par la loi des grands nombres (Corollaire 10.1 et Remarque 10.2 du cours 10 [3]), pour tout $t > 0$, la probabilité que la proportion de réponses correctes s'écarte de $\frac{1}{4}$ d'au moins t tend vers 0 quand le nombre de questions tend vers $+\infty$; cela ne garantit pas 25 bonnes réponses sur 100.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.