Exercices type Bac & Solutions : Fonctions trigonométriques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 11.1 du cours 11* désigne un énoncé numéroté du cours 11 [2], et un renvoi comme *Théorème 2.3 du cours 2*, un énoncé numéroté du cours sur les limites [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Table des matières

1 Cercle trigonométrique, cosinus et sinus **1**

2 Symétries et valeurs remarquables **2**

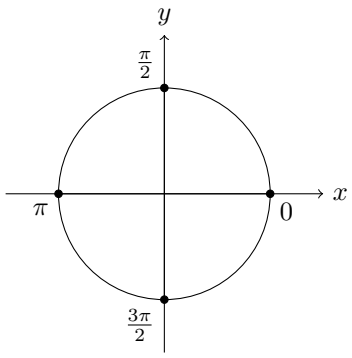
3 Fonction tangente **3**

4 Équations trigonométriques **5**

1 Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

Exercice 1 *Dessiner le cercle trigonométrique et placer les points associés aux réels* 0, $\frac{\pi}{2}$, π *et* $\frac{3\pi}{2}$.

Solution 1 *Par le Théorème 11.2 (i) du cours 11 [2], ces points sont les intersections du cercle avec les axes :* $M(0) = (1, 0)$, $M(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$, $M(\pi) = (-1, 0)$ *et* $M(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$.



Exercice 2 *Exprimer* $\sin(\frac{\pi}{6}+2\pi)$ *en fonction de* $\sin(\frac{\pi}{6})$*, puis donner sa valeur.*

Solution 2 *La fonction* sin *est périodique de période* 2π *(Théorème 11.1 (i) du cours 11 [2]) : pour tout réel* x *et tout* $k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$. *Avec* $x = \frac{\pi}{6}$ *et* $k = 1$, $\sin(\frac{\pi}{6}+2\pi) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [2]).*

Exercice 3 *Démontrer que* $|\cos(x)| \leq 1$ *pour tout réel* x*.*

Solution 3 *Soit* x *un réel. Par le Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [2],* $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$*, donc* $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) \leq 1$*, car* $\sin^2(x) \geq 0$*. Ainsi* $|\cos(x)|^2 \leq 1$*, et, comme* $|\cos(x)| \geq 0$, $|\cos(x)| \leq 1$*. C'est le Théorème 11.1 (iii) du cours 11 [2], dont c'est la preuve.*

Exercice 4 *Calculer* $\cos^2(\frac{\pi}{5}) + \sin^2(\frac{\pi}{5})$*.*

Solution 4 *Par le Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [2],* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ *pour tout réel* x*. Donc* $\cos^2(\frac{\pi}{5})+\sin^2(\frac{\pi}{5}) = 1$*, sans qu'il soit besoin de connaître* $\cos(\frac{\pi}{5})$*.*

2 Symétries et valeurs remarquables

Exercice 5 *Calculer* $\sin(\frac{\pi}{4})$ *et* $\cos(\frac{\pi}{4})$*, en utilisant le fait que* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$*.*

Solution 5 *L'égalité* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$ *vient du Théorème 11.3 du cours 11 [2], car* $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$*. Soit* $a = \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4})$*. Comme* $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$*, le point associé à* $\frac{\pi}{4}$ *est dans le premier quadrant, où le cosinus et le sinus sont strictement positifs (Théorème 11.2 (ii) du cours 11 [2]) :* $a > 0$*. D'autre part, par le Théorème 11.1 (ii) du cours 11 [2],*

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = 2a^2.$$

Donc $a^2 = \frac{1}{2}$*, d'où* $a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$*, puisque* $a > 0$*. On en déduit* $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$*.*

Exercice 6 *Sans utiliser de calculatrice, trouver la valeur de* $\sin(\frac{5\pi}{6})$.

Solution 6 *Par le Théorème 11.3 du cours 11 [2], pour tout réel* x,

$$\sin(\pi - x) = \sin(x).$$

Donc $\sin(\frac{5\pi}{6}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [2]).*

Exercice 7 *Déterminer* $\cos(\frac{2\pi}{3})$ *en utilisant les valeurs remarquables.*

Solution 7 *Par le Théorème 11.3 du cours 11 [2], pour tout réel* x,

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

Comme $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, *on obtient* $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [2]). On remarque que* $\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi$ *: le point associé est dans le deuxième quadrant, où le cosinus est strictement négatif (Théorème 11.4 (ii) du cours 11 [2]).*

3 Fonction tangente

Exercice 8 *Définir la fonction tangente en termes de sinus et de cosinus.*

Solution 8 *La fonction tangente est définie sur* $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, *l'ensemble des réels* x *tels que* $\cos(x) \neq 0$, *par* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *(Définition 11.4 du cours 11 [2]).*

Exercice 9 *Calculer* $\tan(\frac{\pi}{4})$.

Solution 9 *Par la Définition 11.4 et le Théorème 11.5 du cours 11 [2],*

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Exercice 10 *Trouver les valeurs de* x *dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *où la tangente n'est pas définie.*

Solution 10 *La tangente n'est pas définie lorsque* $\cos(x) = 0$, *c'est-à-dire pour* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$ *(Définition 11.4 du cours 11 [2] et sa lecture). Or* $0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$ *équivaut à* $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$, *soit* $k = 0$ *ou* $k = 1$ *: les valeurs cherchées sont* $x = \frac{\pi}{2}$ *et* $x = \frac{3\pi}{2}$.

Exercice 11 *Montrer que la fonction tangente est périodique de période* π.

Solution 11 *Il faut démontrer que, pour tout* x *où la tangente est définie,* $x+\pi$ *l'est aussi et* $\tan(x + \pi) = \tan(x)$.

Si $x + \pi$ *était de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$, *avec* $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $x = \frac{\pi}{2} + (k - 1)\pi$ *ne serait pas dans le domaine* D *de la tangente : donc* $x + \pi \in D$. *Il découle des*

formules $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ *et* $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ *(Théorème 11.3 du cours 11 [2]) que*

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).\end{aligned}$$

C'est le Théorème 11.10 (i) du cours 11 [2].

Exercice 12 *Vérifier que* $\tan(-x) = -\tan(x)$ *pour tout* x *où la tangente est définie.*

Solution 12 *Si* $x \in D$*, alors* $-x \in D$ *: si l'on avait* $-x = \frac{\pi}{2} + k\pi$*, alors* $x = \frac{\pi}{2} + (-k-1)\pi$*, ce qui contredirait* $x \in D$*. Comme* $\sin(-x) = -\sin(x)$ *et* $\cos(-x) = \cos(x)$ *(Théorème 11.3 du cours 11 [2]),*

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).\end{aligned}$$

C'est le Théorème 11.10 (i) du cours 11 [2].

Exercice 13 *Prouver que*

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty.$$

Solution 13 *Les fonctions* sin *et* cos *sont continues en* $\frac{\pi}{2}$ *(Théorème 11.6 (i) du cours 11), donc, avec le Théorème 11.5 du cours 11 [2],*

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

De plus, $\cos(x) > 0$ *pour* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *(Théorème 11.4 (ii) du cours 11 [2]) :* $\cos(x)$ *tend vers* 0 *par valeurs positives. Par le Théorème 2.3 (ii) du cours 2 [1], valable pour les limites à gauche, le quotient d'une fonction qui tend vers* 1 *par une fonction qui tend vers* 0^+ *tend vers* $+\infty$ *:*

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = +\infty.$$

4 Équations trigonométriques

Exercice 14 *Résoudre l'équation* $\sin(x) = \frac{1}{2}$ *pour* x *dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$.

Solution 14 *Rappelons que, pour tous réels* x *et* α *(Théorème 11.9 (ii) du cours 11 [2]),*

$$\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

D'autre part, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [2]). Donc*

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$*, seul* $k = 0$ *convient dans les deux cas : les solutions sont* $x = \frac{\pi}{6}$ *et* $x = \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 15 *Trouver le réel* x *de l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *tel que* $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin(x) > 0$.

Solution 15 *Rappelons que, pour tous réels* x *et* α *(Théorème 11.9 (i) du cours 11 [2]),*

$$\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi.$$

D'autre part, $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [2]). Donc*

$$\cos(x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Dans $[0, 2\pi]$*, les solutions de* $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *sont donc* $\frac{3\pi}{4}$ *(seul* $k = 0$ *convient dans la première famille) et* $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$ *(seul* $k = 1$ *convient dans la seconde). Or* $\sin(x) > 0$ *pour* $0 < x < \pi$*, et* $\sin(x) < 0$ *pour* $\pi < x < 2\pi$ *(Théorème 11.4 (i) du cours 11 [2]) :* $\sin(\frac{3\pi}{4}) > 0$ *et* $\sin(\frac{5\pi}{4}) < 0$*. La seule solution est donc* $\frac{3\pi}{4}$.

Exercice 16 *Résoudre l'équation* $\tan(x) = \sqrt{3}$ *pour* x *dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$.

Solution 16 *Rappelons que, pour* α *et* x *dans le domaine* D *de la tangente (Théorème 11.11 (i) du cours 11 [2]),*

$$\tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \alpha + k\pi.$$

D'autre part, $\tan(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$ *(Exemple 11.3 du cours 11 [2]), et* $\frac{\pi}{3} \in D$*. Donc*

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Or $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq 2\pi$ *équivaut à* $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{5}{3}$*, soit* $k = 0$ *ou* $k = 1$ *: les solutions dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *sont* $x = \frac{\pi}{3}$ *et* $x = \frac{4\pi}{3}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.