Exercices type Bac & Solutions : Nombres complexes

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 12.10 du cours 12* désigne un énoncé numéroté du cours 12 [2], et un renvoi comme *Théorème 11.5 du cours 11*, un énoncé numéroté du cours sur les fonctions trigonométriques [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Comme dans la Définition 12.4 du cours 12 [2], le *plan complexe* est le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'origine O.

Table des matières

1 Ensemble des nombres complexes **1**

2 Représentation géométrique **2**

3 Argument et forme exponentielle **4**

4 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$ **7**

5 Transformations du plan **8**

1 Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 *Soient les nombres complexes $z_1 = 4 + 3\boldsymbol{i}$ et $z_2 = 1 - 2\boldsymbol{i}$. Calculer le produit $z_1 \cdot z_2$ et donner le résultat sous forme algébrique.*

Solution 1 *Par les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ (Théorème 12.1 (i) du cours 12 [2]) et l'égalité $\boldsymbol{i}^2 = -1$,*

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (4 + 3\boldsymbol{i}) \cdot (1 - 2\boldsymbol{i}) \\ &= 4 \cdot 1 + 4 \cdot (-2\boldsymbol{i}) + 3\boldsymbol{i} \cdot 1 + 3\boldsymbol{i} \cdot (-2\boldsymbol{i}) \\ &= 4 - 8\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{i}^2 \\ &= 4 - 5\boldsymbol{i} + 6 \\ &= 10 - 5\boldsymbol{i}. \end{aligned}$$

Donc $z_1 \cdot z_2 = 10 - 5\boldsymbol{i}$: c'est une forme algébrique, de partie réelle 10 et de partie imaginaire -5 (Définition 12.1 du cours 12 [2]).

Exercice 2 *Trouver le conjugué et le module du nombre complexe $z = 2 + 3\boldsymbol{i}$. Que vaut sa partie imaginaire ?*

Solution 2 *Le nombre $z = 2 + 3\boldsymbol{i}$ est écrit sous forme algébrique, avec $x = 2$ et $y = 3$. Par la Définition 12.2 du cours 12 [2], son conjugué est $\bar{z} = 2 - 3\boldsymbol{i}$ et son module est*

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Par la Définition 12.1 du cours 12 [2], sa partie imaginaire est le réel $\mathrm{Im}\,(z) = 3$.

Exercice 3 *Démontrer que, pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.*

Solution 3 *Soient $z_1 = a + \boldsymbol{i}b$ et $z_2 = c + \boldsymbol{i}d$, avec a, b, c, d réels. Par le Théorème 12.3 du cours 12 [2], $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + \boldsymbol{i}(ad + bc)$. Donc, par la Définition 12.2 du cours 12 [2],*

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\ &= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$(|z_1| \cdot |z_2|)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Les réels positifs $|z_1 \cdot z_2|$ et $|z_1| \cdot |z_2|$ ont donc le même carré : ils sont égaux. C'est le Théorème 12.6 (ii) du cours 12 [2], démontré ici par un calcul direct.

Exercice 4 *Soit z un nombre complexe non nul. Montrer que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.*

Solution 4 *Soit $z = a + \boldsymbol{i}b$, avec a et b réels. Comme $z \neq 0$, le réel $|z|^2 = a^2 + b^2$ n'est pas nul (Théorème 12.4 (iii) du cours 12 [2]), et*

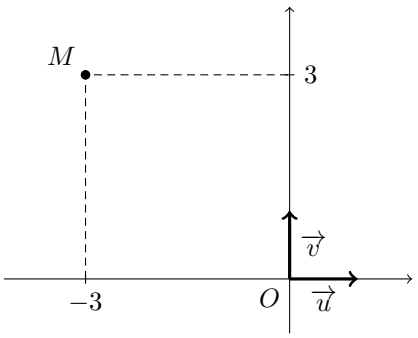
$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a + \boldsymbol{i}b)(a - \boldsymbol{i}b)}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - \boldsymbol{i}^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1.$$

Or z a un unique inverse, noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} (Théorème 12.5 (i) et Définition 12.3 du cours 12 [2]), c'est-à-dire un unique nombre complexe dont le produit par z vaut 1. Donc $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

2 Représentation géométrique

Exercice 5 *Représenter dans le plan complexe le point M d'affixe $z = -3 + 3\boldsymbol{i}$.*

Solution 5 *Par la Définition 12.4 (i) du cours 12 [2], le point M d'affixe $z = -3+3\boldsymbol{i}$ est le point de coordonnées $(-3, 3)$: son abscisse est -3 et son ordonnée est 3. Il est dans le deuxième quadrant.*



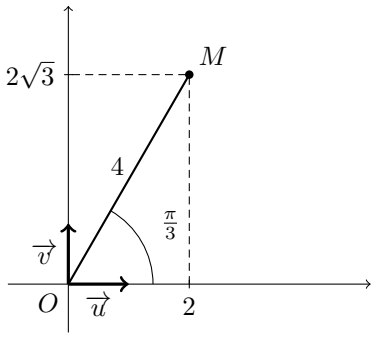
Le point M d'affixe $-3 + 3\boldsymbol{i}$.

Exercice 6 *Soit $z = 4e^{\boldsymbol{i}\pi/3}$. Représenter dans le plan complexe le point M d'affixe z et calculer la forme algébrique de z.*

Solution 6 *Par la Définition 12.5 du cours 12 [2] et le Théorème 11.5 du cours 11 [1],*

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}.$$

Le point M a donc pour coordonnées $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$. De plus, par le Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [2], $|z| = 4$ et $\frac{\pi}{3}$ est un argument de z. Le point M est donc à la distance $OM = 4$ de l'origine (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]). Enfin, $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ (Définition 12.6 du cours 12 [2] et sa lecture).



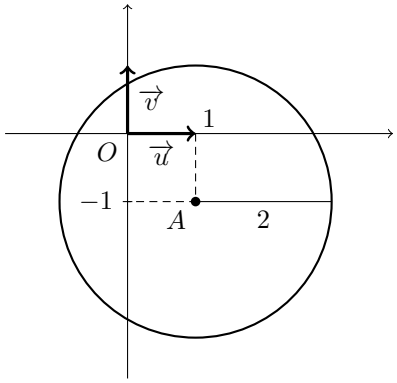
Le point M d'affixe $4e^{\boldsymbol{i}\pi/3} = 2 + 2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$.

Exercice 7 *Trouver l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|z - (1 - \boldsymbol{i})| = 2$.*

Solution 7 *Soit A le point d'affixe $a = 1-\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire le point de coordonnées $(1,-1)$. Pour tout point M d'affixe z, la distance AM vaut $|z-a|$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [2]), d'où*

$$|z-(1-\boldsymbol{i})| = 2 \Leftrightarrow AM = 2.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre A et de rayon 2 (Théorème 12.8 (i) du cours 12 [2]).



Le cercle de centre A, d'affixe $1-\boldsymbol{i}$, et de rayon 2.

3 Argument et forme exponentielle

Exercice 8 *Calculer le module et un argument du nombre complexe $z = -1+\boldsymbol{i}$.*

Solution 8 *Le module de z est $|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$ (Définition 12.2 du cours 12 [2]). Comme $z \neq 0$, il a des arguments. Si θ est l'un d'eux, alors, par le Théorème 12.10 (i) du cours 12 [2],*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le réel $\theta = \frac{3\pi}{4}$ convient. En effet, par les Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [1],

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ainsi $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{\boldsymbol{i}3\pi/4}$, donc $\frac{3\pi}{4}$ est un argument de z (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [2]) : $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Exercice 9 *Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3}+\boldsymbol{i}$ sous forme trigonométrique.*

Solution 9 *Le module de z est $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ (Définition 12.2 du cours 12 [2]). Si θ est un argument de z, alors, par le Théorème 12.10 (i) du cours 12 [2],*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|} = \frac{1}{2}.$$

Le réel $\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, car $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ (Théorème 11.5 du cours 11 [1]). D'où la forme trigonométrique de z, de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{6}$ (Théorème 12.10 du cours 12 [2]),

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Exercice 10 *Exprimer le nombre complexe $z = e^{\boldsymbol{i}\pi/2}$ sous forme algébrique.*

Solution 10 *Par la Définition 12.5 du cours 12 [2] et le Théorème 11.5 du cours 11 [1],*

$$e^{\boldsymbol{i}\pi/2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + \boldsymbol{i}\cdot 1 = \boldsymbol{i}.$$

Exercice 11 *Sachant que $z = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$, calculer z^6.*

Solution 11 *Par la formule de Moivre (Théorème 12.13 (iii) du cours 12 [2]), avec $n = 6$,*

$$z^6 = \left(e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right)^6 = e^{\boldsymbol{i}6\cdot\frac{\pi}{3}} = e^{\boldsymbol{i}2\pi}.$$

Or $e^{\boldsymbol{i}2\pi} = e^{\boldsymbol{i}0}$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [2]), et $e^{\boldsymbol{i}0} = 1$, car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [1]). Donc $z^6 = 1$.

Exercice 12 *Trouver la forme exponentielle du nombre complexe $z = -\sqrt{3} - \boldsymbol{i}$.*

Solution 12 *Le module de z est $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ (Définition 12.2 du cours 12 [2]). Si θ est un argument de z, alors, par le Théorème 12.10 (i) du cours 12 [2],*

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{|z|} = -\frac{1}{2}.$$

Le réel $\theta = \frac{7\pi}{6}$ convient. En effet, par les Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [1],

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

D'où la forme exponentielle de z (Théorème 12.10 du cours 12 [2]),

$$z = 2e^{\boldsymbol{i}7\pi/6}.$$

Exercice 13 *Sachant que* $z = 2\cos(\pi/4) + 2\boldsymbol{i}\sin(\pi/4)$*, calculer* z^4*.*

Solution 13 *Par la Définition 12.5 du cours 12 [2],*

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}.$$

Par la règle sur la puissance d'un produit, puis par la formule de Moivre (lecture de la Définition 12.3 et Théorème 12.13 (iii) du cours 12 [2]),

$$z^4 = 2^4\left(e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 16e^{\boldsymbol{i}\pi} = 16\left(\cos\left(\pi\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\pi\right)\right) = -16,$$

car $\cos(\pi) = -1$ *et* $\sin(\pi) = 0$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [1]).*

Exercice 14 *Montrer que, pour tout réel* θ*,*

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta), \\ \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta). \end{cases}$$

Indication : *utiliser la formule de Moivre* $e^{\boldsymbol{i}2\theta} = \left(e^{\boldsymbol{i}\theta}\right)^2$*.*

Solution 14 *Soit* θ *un réel. Par la formule de Moivre avec* $n = 2$*, puis par la notation* $e^{\boldsymbol{i}\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta$ *(Théorème 12.13 (iii) et Définition 12.5 du cours 12 [2]), et comme* $\boldsymbol{i}^2 = -1$*,*

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}2\theta} &= \left(e^{\boldsymbol{i}\theta}\right)^2 \\ &= (\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2\boldsymbol{i}\cos(\theta)\sin(\theta). \end{aligned}$$

D'autre part, par la même définition,

$$e^{\boldsymbol{i}2\theta} = \cos(2\theta) + \boldsymbol{i}\sin(2\theta).$$

On a ainsi deux formes algébriques du même nombre complexe. Par l'unicité de la forme algébrique (Théorème 12.2 du cours 12 [2]), leurs parties réelles sont égales, et leurs parties imaginaires aussi :

$$\begin{cases} \cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta), \\ \sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta). \end{cases}$$

Ce sont les formules de duplication du Corollaire 11.3 du cours 11 [1].

Exercice 15 *Montrer que, pour tout réel* θ*,*

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \\ \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \end{cases}$$

Indication : *utiliser la formule de Moivre* $e^{\boldsymbol{i}3\theta} = (e^{\boldsymbol{i}\theta})^3$*.*

Solution 15 *Soit θ un réel. Par la formule de Moivre avec $n = 3$, puis par la notation $e^{i\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta$ (Théorème 12.13 (iii) et Définition 12.5 du cours 12 [2]), et comme $\boldsymbol{i}^2 = -1$ et $\boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$,*

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}3\theta} &= (e^{\boldsymbol{i}\theta})^3 \\ &= (\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\boldsymbol{i}\cos^2\theta\sin\theta + 3\boldsymbol{i}^2\cos\theta\sin^2\theta + \boldsymbol{i}^3\sin^3\theta \\ &= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + \boldsymbol{i}\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right). \end{aligned}$$

D'autre part, par la même définition,

$$e^{\boldsymbol{i}3\theta} = \cos(3\theta) + \boldsymbol{i}\sin(3\theta).$$

Par l'unicité de la forme algébrique (Théorème 12.2 du cours 12 [2]), on identifie les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta, \\ \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta. \end{cases}$$

4 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 16 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 4z + 13 = 0$.*

Solution 16 *C'est une équation du second degré à coefficients réels, $a = 1$, $b = 4$ et $c = 13$, de discriminant $\Delta = 4^2 - 4\cdot 1\cdot 13 = -36$. Comme $\Delta < 0$, par le Théorème 12.16 (iii) du cours 12 [2], elle a deux solutions non réelles et conjuguées,*

$$z_1 = \frac{-4 - \boldsymbol{i}\sqrt{36}}{2} = -2 - 3\boldsymbol{i}, \qquad z_2 = \frac{-4 + \boldsymbol{i}\sqrt{36}}{2} = -2 + 3\boldsymbol{i}.$$

Exercice 17 *Trouver les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$.*

Solution 17 *C'est une équation du second degré à coefficients réels, $a = 1$, $b = -6$ et $c = 10$, de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 36 - 40 = -4$. Comme $\Delta < 0$, par le Théorème 12.16 (iii) du cours 12 [2], elle a deux solutions non réelles et conjuguées,*

$$z_1 = \frac{6 - \boldsymbol{i}\sqrt{4}}{2} = 3 - \boldsymbol{i}, \qquad z_2 = \frac{6 + \boldsymbol{i}\sqrt{4}}{2} = 3 + \boldsymbol{i}.$$

Exercice 18 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 1 = 0$.*

Solution 18 *Comme $\boldsymbol{i}^2 = -1$, pour tout nombre complexe z,*

$$z^2 + 1 = z^2 - \boldsymbol{i}^2 = (z - \boldsymbol{i})(z + \boldsymbol{i}).$$

Un produit de nombres complexes dont un facteur est nul est nul et, réciproquement, s'il est nul, alors l'un des facteurs est nul (Théorème 12.5 (ii) du cours 12 [2]). Donc

$$z^2+1=0 \Leftrightarrow z-\boldsymbol{i}=0 \text{ ou } z+\boldsymbol{i}=0 \Leftrightarrow z=\boldsymbol{i} \text{ ou } z=-\boldsymbol{i}.$$

Les solutions sont $\boldsymbol{i}$ et $-\boldsymbol{i}$, et il n'y en a pas d'autres. On les retrouve par le Théorème 12.16 (iii) du cours 12 [2], avec $\Delta=-4$.

Exercice 19 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=8$.*

Solution 19 *Le nombre 8 a pour forme exponentielle $8=8e^{\boldsymbol{i}\cdot 0}$. Par le Théorème 12.17 du cours 12 [2], avec $n=3$, $\rho=8$, $\alpha=0$ et $\rho^{1/3}=2$ (car $2^3=8$), l'équation a exactement trois solutions,*

$$z_k=2e^{\boldsymbol{i}\frac{2k\pi}{3}}, \quad k\in\{0,1,2\}, \qquad \text{soit} \qquad z_0=2, \quad z_1=2e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}, \quad z_2=2e^{\boldsymbol{i}\frac{4\pi}{3}}.$$

Comme $\frac{2\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$, les Théorèmes 11.3 et 11.5 du cours 11 [1] donnent leurs formes algébriques,

$$z_1=2\left(-\frac{1}{2}+\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+\boldsymbol{i}\sqrt{3}, \qquad z_2=2\left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-\boldsymbol{i}\sqrt{3}.$$

Exercice 20 *Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4=16\boldsymbol{i}$.*

Solution 20 *On a $|16\boldsymbol{i}|=16$ et, par le Théorème 11.5 du cours 11 [1],*

$$16\boldsymbol{i}=16\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=16e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}.$$

Par le Théorème 12.17 du cours 12 [2], avec $n=4$, $\rho=16$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ et $\rho^{1/4}=2$ (car $2^4=16$), l'équation a exactement quatre solutions,

$$z_k=2e^{\boldsymbol{i}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2k\pi}{4}\right)}, \quad k\in\{0,1,2,3\},$$

c'est-à-dire

$$z_0=2e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{8}}, \quad z_1=2e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{8}}, \quad z_2=2e^{\boldsymbol{i}\frac{9\pi}{8}}, \quad z_3=2e^{\boldsymbol{i}\frac{13\pi}{8}}.$$

5 Transformations du plan

Exercice 21 *Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z)=z+1+\boldsymbol{i}$. Trouver l'image de $z=3-2\boldsymbol{i}$ par f.*

Solution 21 *L'image de $z=3-2\boldsymbol{i}$ par f est*

$$f(3-2\boldsymbol{i})=(3-2\boldsymbol{i})+1+\boldsymbol{i}=4-\boldsymbol{i}.$$

L'application du plan associée à f est la translation de vecteur d'affixe $1+\boldsymbol{i}$ (Définition 12.7 et Théorème 12.18 (i) du cours 12 [2]) : elle envoie le point d'affixe $3-2\boldsymbol{i}$ sur le point d'affixe $4-\boldsymbol{i}$.

Exercice 22 *Déterminer le nombre complexe b tel que l'application du plan d'écriture complexe $z' = z - b$ envoie le point d'affixe $1 + \boldsymbol{i}$ sur l'origine O du plan complexe.*

Solution 22 *Par la Définition 12.7 du cours 12 [2], l'image du point d'affixe $1 + \boldsymbol{i}$ est le point d'affixe $1 + \boldsymbol{i} - b$. C'est l'origine O, d'affixe 0, si et seulement si $1 + \boldsymbol{i} - b = 0$, c'est-à-dire $b = 1 + \boldsymbol{i}$. L'écriture complexe cherchée est donc $z' = z - (1 + \boldsymbol{i})$: c'est celle de la translation de vecteur d'affixe $-1 - \boldsymbol{i}$ (Théorème 12.18 (i) du cours 12 [2]).*

Exercice 23 *Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \boldsymbol{i}z$. Trouver l'image du point M d'affixe $z = 1 - \boldsymbol{i}$ par l'application du plan associée à f.*

Solution 23 *Par la Définition 12.7 du cours 12 [2], l'image de M est le point M' d'affixe*

$$f(1 - \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}(1 - \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{i}^2 = 1 + \boldsymbol{i}.$$

Exercice 24 *Soit f la rotation de centre l'origine O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Trouver l'image par f du point M d'affixe $z = 1 + \boldsymbol{i}$.*

Solution 24 *Par le Théorème 12.18 (iii) du cours 12 [2], la rotation de centre le point d'affixe ω et d'angle θ a pour écriture complexe*

$$z' - \omega = e^{\boldsymbol{i}\theta}\,(z - \omega)\,,$$

où z' est l'affixe de l'image du point d'affixe z. Ici $\omega = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, donc, par le Théorème 11.5 du cours 11 [1],

$$z' = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) z = \boldsymbol{i}z.$$

L'image de M par f est donc le point M' d'affixe $z' = \boldsymbol{i}(1 + \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}^2 = -1 + \boldsymbol{i}$.

Exercice 25 *Soit s la symétrie par rapport à l'axe réel. Trouver l'image par s du point M d'affixe $z = 3 + 4\boldsymbol{i}$.*

Solution 25 *Par le Théorème 12.18 (iv) du cours 12 [2], la symétrie s par rapport à l'axe réel a pour écriture complexe*

$$z' = \bar{z},$$

où z' est l'affixe de l'image du point d'affixe z. L'image de M par s est donc le point M' d'affixe $z' = \overline{3 + 4\boldsymbol{i}} = 3 - 4\boldsymbol{i}$.

Exercice 26 *Soit h l'homothétie de centre l'origine O et de rapport 2. Trouver l'image par h du point M d'affixe $z = -2 + 2\boldsymbol{i}$.*

Solution 26 *Par le Théorème 12.18 (ii) du cours 12 [2], l'homothétie de centre le point d'affixe ω et de rapport k a pour écriture complexe*

$$z' - \omega = k\,(z - \omega)\,,$$

où z' est l'affixe de l'image du point d'affixe z. Ici $\omega = 0$ et $k = 2$, donc

$$z' = 2z.$$

L'image de M par h est donc le point M' d'affixe $z' = 2(-2 + 2\boldsymbol{i}) = -4 + 4\boldsymbol{i}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.