Exercices type Bac & Solutions : Équations différentielles

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 13.2 du cours 13* désigne un énoncé numéroté du cours 13 [6]. Les renvois aux cours 3, 4, 6, 9 et 11 désignent de même des énoncés numérotés des cours sur la continuité [1], la dérivation [2], la fonction exponentielle [3], les primitives [4] et les fonctions trigonométriques [5]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Comme dans la Définition 13.1 du cours 13 [6], une *solution sur* un intervalle I d'une équation différentielle d'ordre 1 (resp. 2) est une fonction dérivable (resp. deux fois dérivable) sur I qui vérifie l'équation pour tout $x \in I$, et *résoudre* l'équation sur I, c'est déterminer toutes ses solutions sur I. Les équations à coefficients constants de ces exercices sont résolues sur $\mathbb{R}$.

Table des matières

1 Équations et solutions **1**

2 Équation $y' = ay$ **2**

3 Équation $y' = ay + b$ **3**

4 Équation $y' = ay + g$ **3**

5 Équation $y'' + \omega^2 y = 0$ **6**

1 Équations et solutions

Exercice 1 *Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = e^{2x}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.*

Solution 1 *Par le Théorème 6.6 du cours 6 [3], avec $u(x) = 2x$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 2e^{2x}$ pour tout réel x. Donc, pour tout réel x,*

$$f'(x) - 2f(x) = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0.$$

Donc f est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' - 2y = 0$ (Définition 13.1 (ii) du cours 13 [6]).

Exercice 2 *Déterminer la fonction y, dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée $y'(x)$ est égale à $3x^2$ pour tout réel x, et qui vérifie $y(0) = 4$.*

Solution 2 *La fonction cherchée est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = g$, avec $g(x) = 3x^2$. La fonction g est un polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ (Théorème 3.1 (i) du cours 3 [1]), et $x \mapsto x^3$ en est une primitive sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $x \mapsto x^2$ (Théorème 9.2 du cours 9, avec $n = 2$), et l'on multiplie par 3 (Théorème 9.3 du cours 9 [4]). Par le Théorème 13.1 (i) du cours 13 [6], les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = 3x^2$ sont donc les fonctions*

$$x \mapsto x^3 + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 4$, on trouve $0^3 + k = 4$, soit $k = 4$. Donc

$$y(x) = x^3 + 4,$$

et c'est la seule fonction qui convient (Théorème 13.1 (ii) du cours 13 [6]).

2 Équation $y' = ay$

Exercice 3 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle homogène $y' - 3y = 0$.*

Solution 3 *L'équation s'écrit $y' = 3y$: c'est l'équation $y' = ay$ avec $a = 3$. Par le Théorème 13.2 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^{3x},$$

où k est un réel.

Exercice 4 *Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.*

Solution 4 *L'équation s'écrit $y' = -2y$: c'est l'équation $y' = ay$ avec $a = -2$. Par le Théorème 13.2 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^{-2x},$$

où k est un réel.

Exercice 5 *Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = 0$ qui vérifie $y(0) = 7$.*

Solution 5 *L'équation s'écrit $y' = y$: c'est l'équation $y' = ay$ avec $a = 1$. Par le Théorème 13.2 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto ke^x$, k réel. En utilisant la condition initiale $y(0) = 7$, on trouve $ke^0 = k = 7$. Ainsi, la solution cherchée est*

$$y(x) = 7e^x,$$

et c'est la seule (Corollaire 13.1 du cours 13 [6], avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 7$).

3 Équation $y' = ay + b$

Exercice 6 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - 2y = 5$.*

Solution 6 *L'équation s'écrit $y' = 2y + 5$: c'est l'équation $y' = ay + b$ avec $a = 2 \neq 0$ et $b = 5$, et $-\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$. Par le Théorème 13.3 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^{2x} - \frac{5}{2},$$

où k est un réel. On peut vérifier que la fonction constante $-\frac{5}{2}$ est solution : sa dérivée est nulle, et $2 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 5 = 0$.

Exercice 7 *Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = 3$.*

Solution 7 *L'équation s'écrit $y' = -y + 3$: c'est l'équation $y' = ay + b$ avec $a = -1 \neq 0$ et $b = 3$, et $-\frac{b}{a} = 3$. Par le Théorème 13.3 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^{-x} + 3,$$

où k est un réel.

Exercice 8 *Déterminer la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - 4y = -8$ qui vérifie $y(0) = 1$.*

Solution 8 *L'équation s'écrit $y' = 4y - 8$: c'est l'équation $y' = ay + b$ avec $a = 4 \neq 0$ et $b = -8$, et $-\frac{b}{a} = 2$. Par le Théorème 13.3 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^{4x} + 2, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la condition initiale $y(0) = 1$, on obtient $k + 2 = 1$, donc $k = -1$. La solution cherchée est donc

$$y(x) = 2 - e^{4x},$$

et c'est la seule (Corollaire 13.2 du cours 13 [6]).

4 Équation $y' = ay + g$

Exercice 9 *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$y' = y - x. \tag{E}$$

1. *Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène associée $y' = y$.*

2. *Vérifier que la fonction y_p définie par $y_p(x) = x + 1$ est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.*

3. *Résoudre l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.*

4. *Trouver la solution y de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(0) = 2$.*

Solution 9

1. *C'est l'équation $y' = ay$ avec $a = 1$. Par le Théorème 13.2 du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^x,$$

où k est un réel.

2. *La fonction y_p est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $y_p'(x) = 1$ (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]). Pour tout réel x,*

$$y_p'(x) - y_p(x) = 1 - (x + 1) = -x.$$

Donc $y_p'(x) = y_p(x) - x$ pour tout réel x : y_p est bien une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. *L'équation (E) est l'équation $y' = ay + g$ avec $a = 1$ et $g(x) = -x$, sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Par le Théorème 13.4 du cours 13 [6] et la question 2, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions*

$$x \mapsto ke^x + x + 1, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

4. *On résout l'équation*

$$y(0) = ke^0 + 0 + 1 = 2,$$

ce qui donne $k = 1$. Donc

$$y(x) = e^x + x + 1,$$

et c'est la seule solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ (Corollaire 13.3 du cours 13 [6]).

Exercice 10 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante, avec second membre général :*

$$y' = 2y + x.$$

Indication : essayer une solution particulière de la forme $y_p(x) = Ax + B$, où A et B sont des réels.

Solution 10 *C'est l'équation $y' = ay + g$ avec $a = 2$ et $g(x) = x$, sur $\mathbb{R}$. Cherchons d'abord une solution particulière de la forme de g (Remarque 13.6 du cours 13 [6]). La fonction $y_{\mathrm{p}}(x) = Ax + B$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée A (Théorèmes 4.2 et 4.3 du cours 4 [2]), et elle est solution si et seulement si, pour tout réel x,*

$$A = 2(Ax + B) + x, \quad \textit{soit} \quad A = (2A + 1)x + 2B.$$

Il suffit que le coefficient de x soit nul et que les termes constants soient égaux :

$$\begin{aligned} 2A + 1 &= 0, \\ A &= 2B. \end{aligned}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A = -\frac{1}{2}$ et $B = -\frac{1}{4}$. Vérification : $y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ a pour dérivée $-\frac{1}{2}$, et $2y_{\mathrm{p}}(x) + x = -x - \frac{1}{2} + x = -\frac{1}{2}$ pour tout réel x. Ainsi, y_{p} est une solution particulière.

Par le Théorème 13.4 du cours 13 [6], les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto ke^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :*

$$y' = 3y - \sin(x).$$

Indication : essayer une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{p}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, où A et B sont des réels.

Solution 11 *C'est l'équation $y' = ay + g$ avec $a = 3$ et $g(x) = -\sin(x)$, sur $\mathbb{R}$. Cherchons d'abord une solution particulière de la forme de g (Remarque 13.6 du cours 13 [6]). Par le Théorème 11.6 (ii) du cours 11 [5] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2], la fonction $y_{\mathrm{p}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $-A\sin(x) + B\cos(x)$. Elle est solution si et seulement si, pour tout réel x,*

$$-A\sin(x) + B\cos(x) = 3(A\cos(x) + B\sin(x)) - \sin(x).$$

Il suffit que les coefficients de $\cos(x)$ soient égaux ($B = 3A$) et que ceux de $\sin(x)$ le soient aussi ($-A = 3B - 1$), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} -3A + B &= 0, \\ A + 3B &= 1. \end{aligned}$$

En résolvant ce système, nous trouvons $A = \frac{1}{10}$ et $B = \frac{3}{10}$. Vérification : $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{3}{10}\sin(x)$ a pour dérivée $-\frac{1}{10}\sin(x) + \frac{3}{10}\cos(x)$, et

$$3y_{\mathrm{p}}(x) - \sin(x) = \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{9}{10}\sin(x) - \sin(x) = \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)$$

pour tout réel x. Ainsi, y_{p} est une solution particulière.

Par le Théorème 13.4 du cours 13 [6], les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont donc les fonctions

$$x \mapsto ke^{3x} + \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{3}{10}\sin(x), \qquad k \in \mathbb{R}.$$

5 Équation $y'' + \omega^2 y = 0$

Exercice 12 *Vérifier que la fonction* cos *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$.

Solution 12 *Par le Théorème 11.6 (ii) du cours 11 [5], la fonction* cos *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et* $\cos' = -\sin$. *La fonction* $-\sin$ *est à son tour dérivable sur* $\mathbb{R}$, *de dérivée* $-\cos$ *(Théorème 11.6 (ii) du cours 11 [5] et Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2]). Donc* cos *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $\cos'' = -\cos$, *et, pour tout réel* x,

$$\cos''(x) + \cos(x) = -\cos(x) + \cos(x) = 0.$$

Donc cos *est bien une solution sur* $\mathbb{R}$ *de* $y'' + y = 0$ *(Définition 13.1 (ii) du cours 13 [6]). C'est le cas* $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$ *du Théorème 13.5 (i) du cours 13 [6].*

Exercice 13 *On considère l'équation différentielle* $y'' + 9y = 0$.

1. *Résoudre cette équation sur* $\mathbb{R}$.
2. *Déterminer les solutions qui vérifient* $y(0) = 0$. *Cette seule condition suffit-elle à déterminer une solution ?*
3. *Soit* $\omega > 0$ *un réel. On suppose que la fonction* $x \mapsto \sin(3x)$ *est une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $y'' + \omega^2 y = 0$. *Déterminer* ω.

Solution 13

1. *L'équation s'écrit* $y'' + \omega^2 y = 0$ *avec* $\omega = 3 > 0$, *car* $3^2 = 9$. *Par le Théorème 13.5 (i) du cours 13 [6], ses solutions sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions*

$$x \mapsto \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2. *Pour une telle solution,* $y(0) = \alpha\cos(0) + \beta\sin(0) = \alpha$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [5]). Les solutions qui vérifient* $y(0) = 0$ *sont donc les fonctions* $x \mapsto \beta\sin(3x)$, *où* β *est un réel quelconque. Il y en a une infinité : par exemple* $\sin(3x)$ *et* $2\sin(3x)$. *Une seule condition ne suffit pas ; il faut aussi la valeur de la dérivée en* 0 *(Théorème 13.5 (ii) du cours 13 [6]).*

3. *Soit* $f(x) = \sin(3x)$. *Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [5] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2],* f *est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *avec* $f'(x) = 3\cos(3x)$ *et* $f''(x) = -9\sin(3x)$. *Comme* f *est solution, on a, pour tout réel* x,

$$-9\sin(3x) + \omega^2\sin(3x) = 0.$$

Avec $x = \frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [5]), et il vient* $-9 + \omega^2 = 0$, *soit* $\omega^2 = 9$. *Comme* $\omega > 0$, $\omega = 3$. *Réciproquement,* f *est bien solution de* $y'' + 9y = 0$, *par la question 1 avec* $\alpha = 0$ *et* $\beta = 1$.

Exercice 14 *Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$ qui vérifie $f(0) = 2$ et $f'(0) = -8$.*

Solution 14 *L'équation s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 4 > 0$. Par le Théorème 13.5 (i) du cours 13 [6], ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f(x) = \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)$, α et β réels. Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [5] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2], pour tout réel x,*

$$f'(x) = -4\alpha\sin(4x) + 4\beta\cos(4x).$$

Comme $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [5]), on a $f(0) = \alpha$ et $f'(0) = 4\beta$. Les conditions donnent $\alpha = 2$ et $4\beta = -8$, soit $\beta = -2$. La solution cherchée est donc

$$f(x) = 2\cos(4x) - 2\sin(4x),$$

et c'est la seule (Théorème 13.5 (ii) du cours 13 [6]). On retrouve la formule de ce théorème, avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et $y_1 = -8$: $y_0\cos(4x) + \frac{y_1}{4}\sin(4x) = 2\cos(4x) - 2\sin(4x)$.

Exercice 15 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' + 9y = 0. \tag{F}$$

1. *Déterminer la solution f de (F) sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3$, et l'écrire sous la forme $f(x) = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$.*
2. *Vérifier le résultat en calculant $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.*

Solution 15

1. *L'équation (F) s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3 > 0$. Par le Théorème 13.5 (ii) du cours 13 [6], avec $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = 2$ et $y_1 = 3$, il existe une seule solution qui vérifie ces conditions, et c'est, pour tout réel x,*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + \frac{3}{3}\sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Par le Théorème 11.3 du cours 11 [5] (parité, puis angle $\frac{\pi}{2} - u$, avec $u = 3x$),

$$\begin{aligned} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin(3x), \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = -\cos(3x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel x,

$$f(x) = -\cos(3x) + 2\sin(3x),$$

soit $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

2. *Par le Corollaire 11.1 du cours 11 [5] et le Théorème 4.3 (i) du cours 4 [2], $f'(x) = 3\sin(3x) + 6\cos(3x)$ pour tout réel x. Comme $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (Théorème 11.5 du cours 11 [5]),*

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -0 + 2 \times 1 = 2, \qquad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times 1 + 6 \times 0 = 3.$$

On retrouve les deux conditions de la question 1.

Exercice 16 *On considère l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, et sa solution f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = -2$.*

1. *Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.*
2. *Écrire $f(x)$ sous la forme $A\cos(2x + \varphi)$, où $A > 0$ et φ sont des réels.*
3. *En déduire que $|f(x)| \leq 2$ pour tout réel x, et trouver un réel x tel que $f(x) = 2$.*

Solution 16

1. *L'équation s'écrit $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 2 > 0$. Par le Théorème 13.5 (ii) du cours 13 [6], avec $x_0 = 0$, $y_0 = \sqrt{3}$ et $y_1 = -2$, la solution f existe, est unique, et, pour tout réel x,*

$$f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \frac{-2}{2}\sin(2x) = \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x).$$

2. *Par le Corollaire 13.4 du cours 13 [6], une telle écriture existe. Comme dans sa preuve, avec $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = -1$, on pose*

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{3+1} = 2 > 0,$$

comme l'énoncé le demande, et l'on cherche φ tel que $\cos\varphi = \frac{\alpha}{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\varphi = -\frac{\beta}{A} = \frac{1}{2}$: $\varphi = \frac{\pi}{6}$ convient (Théorème 11.5 du cours 11 [5]). Le Théorème 11.12 du cours 11 [5] permet de le vérifier, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) &= 2\left(\cos(2x)\cos\frac{\pi}{6} - \sin(2x)\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x)\right) = f(x). \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ pour tout réel x.

3. *Pour tout réel x, $\left|\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right| \leq 1$ (Théorème 11.1 (iii) du cours 11 [5]), donc $|f(x)| \leq 2$. Pour $x = -\frac{\pi}{12}$, $2x + \frac{\pi}{6} = 0$ et $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos(0) = 2$ (Théorème 11.5 du cours 11 [5]). Le réel 2 est l'amplitude de la solution (Remarque 13.7 du cours 13 [6]).*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray. Cours 13. Équations différentielles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.