Exercices type Bac & Solutions : Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 15.4 du cours 15* désigne un énoncé numéroté du cours 15 [3] sur le produit scalaire et la géométrie dans l'espace. Les renvois aux cours 11 et 14 désignent de même des énoncés numérotés des cours sur les fonctions trigonométriques [1] et sur les vecteurs et la géométrie dans le plan et l'espace [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Comme dans le cours 14 [2], la notation $\overrightarrow{u}\,(x,y,z)$ (resp. $M\,(x,y,z)$) signifie que le vecteur $\overrightarrow{u}$ (resp. le point M) a pour coordonnées (x,y,z) dans la base (resp. le repère) de l'énoncé, et de même dans le plan avec deux coordonnées ; la longueur d'un segment $[AB]$ est notée AB, et $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$. Dans tous les exercices, les bases et les repères sont orthonormés : le calcul du produit scalaire par les coordonnées l'exige (Théorème 15.2 du cours 15 [3]). Ils sont de plus orthonormés directs dans les exercices qui utilisent un produit vectoriel (Définition 15.7 du cours 15 [3]), et l'énoncé le dit.

Table des matières

1 Produit scalaire **2**

2 Angle et projection **4**

3 Vecteurs normaux et équations **7**

4 Produit vectoriel **10**

5 Positions relatives **11**

6 Distances et sphère **14**

1 Produit scalaire

Exercice 1 *Dans une base orthonormée* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *du plan, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{a}\,(1,2)$ *et* $\overrightarrow{b}\,(3,-1)$. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$. *Les vecteurs* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *sont-ils orthogonaux ?*

Solution 1 *La base est orthonormée : par le Théorème 15.2 (i) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1\times 3 + 2\times(-1) = 3-2 = 1.$$

Ce produit scalaire n'est pas nul, donc $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *ne sont pas orthogonaux (Théorème 15.4 du cours 15 [3]).*

Exercice 2 *Dans une base orthonormée* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *de l'espace, on considère les vecteurs* $\overrightarrow{u}\,(2,-3,4)$ *et* $\overrightarrow{v}\,(-1,5,2)$.

1. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.
2. *Déterminer le réel* m *tel que le vecteur* $\overrightarrow{w}\,(m,1,2)$ *soit orthogonal à* $\overrightarrow{u}$.

Solution 2

1. *La base est orthonormée : par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 2\times(-1) + (-3)\times 5 + 4\times 2 = -2-15+8 = -9.$$

2. *Par le Théorème 15.4 du cours 15 [3],* $\overrightarrow{w}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 0$. *Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = 2m + (-3)\times 1 + 4\times 2 = 2m+5.$$

Donc $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ *si et seulement si* $2m+5=0$, *c'est-à-dire* $m = -\frac{5}{2}$. *Contrôle : pour* $\overrightarrow{w}\left(-\frac{5}{2},1,2\right)$, $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} = -5-3+8 = 0$.

Exercice 3 *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan, ou deux vecteurs de l'espace, tels que* $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ *et* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -1$.

1. *Calculer* $(\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v})\cdot(3\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$.
2. *Calculer* $\|\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}\|$ *et* $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$.

Solution 3 *Les règles de calcul du Théorème 15.3 du cours 15 [3] valent pour les vecteurs du plan comme pour ceux de l'espace, et n'utilisent aucun repère : les calculs ci-dessous valent donc dans les deux cas. Ici* $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 = 4$ *et* $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{v}\|^2 = 9$ *(Théorème 15.3 (iii) du cours 15 [3]).*

1. *On développe par la linéarité à gauche et à droite (Théorème 15.3 (ii) du cours 15), puis on regroupe $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ (Théorème 15.3 (i) du cours 15 [3]) :*

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}) \cdot (3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) &= 3\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + 6\,\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - 2\,\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \\ &= 3 \times 4 + 5 \times (-1) - 2 \times 9 = -11.\end{aligned}$$

2. *Par le Théorème 15.3 (iv) et (ii) du cours 15 [3],*

$$\|\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v}) + \|2\overrightarrow{v}\|^2 = 4 + 4 \times (-1) + 4 \times 9 = 36,$$

car $\|2\overrightarrow{v}\|^2 = (2\overrightarrow{v}) \cdot (2\overrightarrow{v}) = 4\,\|\overrightarrow{v}\|^2$. Une norme étant positive, $\|\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}\| = 6$. De même,

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2 = 4 + 2 + 9 = 15,$$

donc $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = \sqrt{15}$.

Exercice 4 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, ou deux vecteurs de l'espace.*

1. *Démontrer l'*identité de polarisation

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right).$$

2. *En déduire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ lorsque $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 5$ et $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\| = 3$.*

Solution 4

1. *Par le Théorème 15.3 (iv) du cours 15 [3], valable dans le plan comme dans l'espace,*

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2, \\ \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 &= \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2.\end{aligned}$$

En soustrayant la seconde égalité de la première, on obtient

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 4\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v},$$

d'où l'identité. Elle exprime, comme la Définition 15.1 du cours 15 [3], le produit scalaire à l'aide de normes seulement.

2. *Par la question 1,*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(5^2 - 3^2\right) = \frac{16}{4} = 4.$$

Exercice 5 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, ou deux vecteurs de l'espace.*

1. *Démontrer l'*identité du parallélogramme

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2\right).$$

2. *Soit $ABCD$ un parallélogramme du plan ou de l'espace. En déduire que $AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$.*

Solution 5

1. *On reprend les deux égalités du Théorème 15.3 (iv) du cours 15 [3] écrites dans l'exercice 4, et on les additionne : les termes $2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $-2\,\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ s'éliminent, et il reste*

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=2\,\|\overrightarrow{u}\|^2+2\,\|\overrightarrow{v}\|^2.$$

2. *Posons $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AD}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (Exemple 14.1 du cours 14 [2]). Par la relation de Chasles et le Théorème 14.3 (i) du cours 14 [2], $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$, donc $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=\left(-\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BD}\right)=BD^2$ (Théorème 15.3 (ii), (iii) du cours 15 [3]). Comme $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|=AC$, la question 1 donne*

$$AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right).$$

Comme $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ (Théorème 14.3 (iv) du cours 14), on a $DC=AB$ et $BC=AD$ (Théorème 14.1 (iii) du cours 14 [2]) : la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses quatre côtés.

2 Angle et projection

Exercice 6 *Dans une base orthonormée $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ du plan, calculer l'angle θ des vecteurs $\overrightarrow{a}\,(1,2)$ et $\overrightarrow{b}\,(2,-1)$.*

Solution 6 *Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ ne sont pas nuls, car leurs coordonnées ne sont pas toutes nulles : leur angle θ est défini, et $\theta\in[0,\pi]$ (Définition 15.2 du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.2 (i) du cours 15 [3], $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times2+2\times(-1)=0$, et par le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [2], $\|\overrightarrow{a}\|=\left\|\overrightarrow{b}\right\|=\sqrt{5}$. Par le Théorème 15.5 du cours 15 [3],*

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|\left\|\overrightarrow{b}\right\|}=\frac{0}{5}=0.$$

La fonction cos *est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11), et $\cos\frac{\pi}{2}=0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [1]) : le seul réel de $[0,\pi]$ de cosinus nul est $\frac{\pi}{2}$. Donc $\theta=\frac{\pi}{2}$, et les vecteurs sont orthogonaux (Théorème 15.4 du cours 15 [3]).*

Exercice 7 *Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls, d'angle θ. Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$. Que dire si l'un des deux vecteurs est nul ?*

Solution 7 *Par le Théorème 15.4 du cours 15 [3], $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Les vecteurs étant non nuls, le Théorème 15.5 du cours 15 donne $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta$, avec $\|\overrightarrow{u}\| > 0$ et $\|\overrightarrow{v}\| > 0$ (Théorème 15.3 (iii) du cours 15 [3]). Donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\cos\theta = 0$.*

Comme $\theta \in [0, \pi]$ (Définition 15.2 du cours 15 [3]), que $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ (Théorème 11.8 (i) du cours 11) et que $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ (Théorème 11.5 du cours 11 [1]), $\cos\theta = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$. Donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Si l'un des deux vecteurs est nul, ils sont orthogonaux (Définition 14.12 (i) du cours 14 [2]), mais leur angle n'est pas défini (Définition 15.2 du cours 15 [3]) : l'équivalence ne s'applique pas. C'est pourquoi le critère d'orthogonalité s'énonce avec le produit scalaire, et non avec l'angle.

Exercice 8 *Dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $A\,(1, 2, 3)$, $B\,(2, 0, 1)$, $C\,(-1, -1, 2)$ et $D\,(3, -2, 4)$.*

1. *Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.*
2. *Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?*
3. *Vérifier sur ces vecteurs l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.*
4. *Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.*
5. *Soit θ l'angle des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculer $\cos\theta$, puis donner une valeur approchée de θ.*

Solution 8

1. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2],*

$$\overrightarrow{AB}\,(1, -2, -2)\,, \quad \overrightarrow{AC}\,(-2, -3, -1)\,, \quad \overrightarrow{AD}\,(2, -4, 1)\,.$$

2. *Le repère est orthonormé : par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-3) + (-2) \times (-1) = -2 + 6 + 2 = 6.$$

Ce produit scalaire n'est pas nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux (Théorème 15.4 du cours 15 [3]).

3. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2],* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ *a pour coordonnées* $(0, -7, 0)$. *On calcule séparément les deux membres (Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3]) :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = 1 \times 0 + (-2) \times (-7) + (-2) \times 0 = 14,$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \times 2 + (-2) \times (-4) + (-2) \times 1 = 8,$$

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6 + 8 = 14$. *L'égalité est donc vraie pour ces vecteurs. Ce calcul ne la démontre pas en général : pour tous vecteurs, elle est donnée par le Théorème 15.3 (ii) du cours 15 [3].*

4. *Par le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2],*

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$
$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

5. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont non nuls (question 4) : leur angle* θ *est défini, c'est l'angle géométrique* $\widehat{BAC}$, *et* $\theta \in [0, \pi]$ *(Définition 15.2 du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.5 du cours 15 [3],*

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}.$$

La fonction cos *étant strictement décroissante sur* $[0, \pi]$ *(Théorème 11.8 (i) du cours 11 [1]),* θ *est le seul réel de* $[0, \pi]$ *de cosinus* $\frac{\sqrt{14}}{7}$ *; on le note* $\theta = \arccos \frac{\sqrt{14}}{7}$ *(touche* arccos, *ou* $\cos^{-1}$, *de la calculatrice). On obtient* $\theta \approx 1{,}007$ *radian, soit environ* 57,7 *degrés.*

Exercice 9 *Soit* ABC *un triangle tel que* $AB = 4$, $AC = 6$ *et* $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. *Calculer la longueur* BC.
3. *Soit* I *le milieu de* $[BC]$. *Calculer la longueur* AI *de la médiane issue de* A.
4. *Soit* H *le projeté orthogonal de* C *sur la droite* (AB). *Calculer* AH, *puis la hauteur* CH.

Solution 9 *Les points* A, B, C *ne sont pas alignés, puisque* ABC *est un triangle ; en particulier* $A \neq B$ *et* $A \neq C$, *et les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *sont non nuls (Théorème 14.3 (i) du cours 14 [2]).*

1. *L'angle des vecteurs non nuls* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *est* $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ *(Définition 15.2 du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.5 du cours 15 [3] et la valeur* $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ *(Théorème 11.5 du cours 11 [1]),*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{3} = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12.$$

2. *Par la formule d'Al-Kashi (Théorème 15.7 (i) du cours 15 [3]),*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 16 + 36 - 24 = 28,$$

donc $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

3. *Par le théorème de la médiane (Théorème 15.7 (ii) du cours 15 [3]),* $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$, *soit* $52 = 2AI^2 + 14$. *Donc* $AI^2 = 19$ *et* $AI = \sqrt{19}$.

4. *Comme* $A \neq B$, *le Théorème 15.6 (i) du cours 15 [3] donne* $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$, *avec*

$$t = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

Donc $AH = |t|\,AB = \frac{3}{4} \times 4 = 3$ *(Définition 14.2 (ii) du cours 14 [2]). Ensuite,* $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ *(relation de Chasles), où* $\overrightarrow{HC}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{AB}$ *(Définition 15.3 du cours 15), donc à* $\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$ *(Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [2]) :* $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ *(Théorème 15.4 du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.3 (iv) du cours 15 [3],* $AC^2 = AH^2 + HC^2$, *d'où*

$$CH^2 = 36 - 9 = 27, \qquad CH = 3\sqrt{3}.$$

3 Vecteurs normaux et équations

Exercice 10 *Dans un repère orthonormé du plan, trouver un vecteur normal à la droite* $\mathcal{D}$ *d'équation* $2x - 3y + 6 = 0$.

Solution 10 *L'équation est* $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ *avec* $\alpha = 2$, $\beta = -3$, $\gamma = 6$, *et* $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. *Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.8 (ii) du cours 15 [3] dit que le vecteur* $\overrightarrow{n}\,(2, -3)$ *est normal à* $\mathcal{D}$. *Contrôle :* $\mathcal{D}$ *a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\,(3, 2)$ *(Théorème 14.13 du cours 14 [2]), et* $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 6 - 6 = 0$. *Tout vecteur non nul colinéaire à* $\overrightarrow{n}$, *comme* $(-4, 6)$, *est aussi normal à* $\mathcal{D}$, *car il est orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *(Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [2]).*

Exercice 11 *Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points* $A\,(1, 2)$ *et* $B\,(3, 4)$.

1. *Le vecteur* $\overrightarrow{n}\,(4, 2)$ *est-il normal à la droite* (AB) *?*

2. *Donner un vecteur normal à* (AB).

Solution 11 *Par le Théorème 14.10 (ii) du cours 14,* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $(2,2)$ *; il est non nul, donc* $A \neq B$ *(Théorème 14.3 (i) du cours 14), et* $\overrightarrow{AB}$ *est un vecteur directeur de* (AB) *(Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [2]).*

1. *Un vecteur normal à* (AB) *est orthogonal à tous ses vecteurs directeurs (Définition 15.4 du cours 15 [3]), donc à* $\overrightarrow{AB}$*. Or, par le Théorème 15.2 (i) du cours 15,*

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 2 + 2 \times 2 = 12 \neq 0,$$

donc $\overrightarrow{n}$ *n'est pas orthogonal à* $\overrightarrow{AB}$ *(Théorème 15.4 du cours 15 [3]) : il n'est pas normal à* (AB).

2. *Le vecteur* $\overrightarrow{m}\,(1,-1)$ *est non nul et* $\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 - 2 = 0$ *: il est orthogonal au vecteur directeur* $\overrightarrow{AB}$ *(Théorème 15.4 du cours 15), donc normal à* (AB) *(Définition 15.4 du cours 15 [3]).*

Exercice 12 *Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite* $\mathcal{D}$: $x + 2y - 5 = 0$ *et le point* $P\,(1,-2)$*. Donner une équation cartésienne de la droite* $\mathcal{D}'$ *passant par* P *et perpendiculaire à* $\mathcal{D}$*.*

Solution 12 ***Étape 1 : un vecteur normal à*** $\mathcal{D}'$***.*** *Par le Théorème 14.13 du cours 14 [2], avec* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$*, la droite* $\mathcal{D}$ *a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{u}\,(-2,1)$*. Par la Définition 14.12 (i) du cours 14 [2], dire que* $\mathcal{D}'$ *est perpendiculaire à* $\mathcal{D}$*, c'est dire qu'un vecteur directeur de* $\mathcal{D}'$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{u}$*. Le vecteur* $\overrightarrow{u}$*, non nul, est alors un vecteur normal à* $\mathcal{D}'$ *(Définition 15.4 du cours 15 [3]).*

Étape 2 : une équation. *Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.8 (i) du cours 15 [3], avec* $A = P$ *et* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u}\,(-2,1)$*, dit que* $\mathcal{D}'$ *est l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{u} = 0$*, et qu'elle a pour équation*

$$-2\,(x-1) + 1 \times (y+2) = 0,$$

qui se simplifie en $-2x + y + 4 = 0$*. En multipliant par* -1 *(Remarque 14.4 du cours 14 [2]), une équation cartésienne de* $\mathcal{D}'$ *est*

$$2x - y - 4 = 0.$$

Contrôle : $2 \times 1 - (-2) - 4 = 0$*, donc* $P \in \mathcal{D}'$ *; et* $\mathcal{D}'$ *a pour vecteur directeur* $(1,2)$ *(Théorème 14.13 du cours 14 [2]), orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *car* $-2 + 2 = 0$ *: la droite obtenue est bien perpendiculaire à* $\mathcal{D}$*.*

Exercice 13 *Dans un repère orthonormé de l'espace, trouver un vecteur normal au plan* $\mathcal{P}$ *d'équation* $x - 2y + 3z - 7 = 0$*.*

Solution 13 *L'équation est* $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ *avec* $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, $d = -7$, *et* α, β, γ *ne sont pas tous nuls. Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3] dit que l'ensemble* $\mathcal{P}$ *est un plan, de vecteur normal* $\overrightarrow{n}(1,-2,3)$. *Tout vecteur normal à* $\mathcal{P}$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{n}$ *(Théorème 15.9 (iv) du cours 15 [3]).*

Exercice 14 *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points* $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ *et le vecteur* $\overrightarrow{n}(1,1,1)$.

1. *Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.*
2. *Vérifier que* $\overrightarrow{n}$ *est normal au plan* (ABC).
3. *En déduire une équation cartésienne du plan* (ABC).

Solution 14 *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2], les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *ont pour coordonnées* $(-1,1,0)$ *et* $(-1,0,1)$.

1. *Le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est non nul. Par le Théorème 14.4 (ii) du cours 14 [2],* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que* $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, *c'est-à-dire, en coordonnées,* $-1 = -k$, $0 = k$ *et* $1 = 0$ *: la dernière égalité est fausse, et aucun réel k ne convient. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc A, B, C ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [2]).*
2. *Par le Théorème 14.7 (ii) du cours 14 [2],* (ABC) *est le plan passant par A de vecteurs directeurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. *Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 + 1 + 0 = 0, \qquad \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 0 + 1 = 0.$$

   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ *est donc orthogonal à* $\overrightarrow{AB}$ *et à* $\overrightarrow{AC}$ *(Théorème 15.4 du cours 15) ; comme il est non nul, il est normal au plan* (ABC) *(Définition 15.5 du cours 15 [3]).*
3. *Par le Théorème 15.10 (i) du cours 15 [3], avec le point* $A(1,0,0)$ *et le vecteur normal* $\overrightarrow{n}(1,1,1)$, *le plan* (ABC) *a pour équation* $(x-1)+y+z = 0$, *soit*

$$x + y + z - 1 = 0.$$

   Contrôle : $0 + 1 + 0 - 1 = 0$ *pour B, et* $0 + 0 + 1 - 1 = 0$ *pour C.*

Exercice 15 *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point* $A(2,-1,3)$ *et la droite* Δ *de vecteur directeur* $\overrightarrow{d}(4,0,-1)$. *On dit qu'une droite et un plan sont* perpendiculaires *lorsqu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan. Donner une équation cartésienne du plan* $\mathcal{P}$ *passant par A et perpendiculaire à* Δ.

Solution 15 ***Étape 1 : un vecteur normal.*** *Si $\mathcal{P}$ est perpendiculaire à Δ, un vecteur directeur $\overrightarrow{d}'$ de Δ est colinéaire à un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à $\mathcal{P}$; comme $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{d}'$ sont colinéaires (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [2]) et non nuls, $\overrightarrow{d} = k\overrightarrow{n}$ pour un réel $k \neq 0$. Alors $\overrightarrow{d}$, non nul, est orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ (Théorème 14.17 (ii) du cours 14 [2]) : c'est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (Définition 15.5 du cours 15 [3]).*

Étape 2 : une équation. *Par le Théorème 15.10 (i) du cours 15 [3], le plan passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{d}$ a pour équation*

$$4(x-2) + 0 \times (y+1) - 1 \times (z-3) = 0,$$

soit $4x - z - 5 = 0$. Inversement, par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $4x - z - 5 = 0$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{d}(4, 0, -1)$; il passe par A, car $8 - 3 - 5 = 0$, et il est perpendiculaire à Δ. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donc $4x - z - 5 = 0$.

4 Produit vectoriel

Exercice 16 *Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les points $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 2, 1)$.*

1. *Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A, B, C ne sont pas alignés.*
2. *Donner une équation cartésienne du plan (ABC).*
3. *Calculer l'aire du triangle ABC.*
4. *Les points $D(3, -1, 1)$ et $E(1, 1, 2)$ appartiennent-ils au plan (ABC) ?*

Solution 16

1. *Par le Corollaire 14.2 du cours 14 [2], $\overrightarrow{AB}(1, 1, -2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 2, -1)$. Le repère étant orthonormé direct, la Définition 15.7 du cours 15 [3] donne les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:*

   $$1 \times (-1) - (-2) \times 2 = 3, \quad (-2) \times (-1) - 1 \times (-1) = 3, \quad 1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3.$$

   Donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(3, 3, 3)$. Ce vecteur n'est pas nul : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 15.11 (iv) du cours 15 [3]), donc A, B, C ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [2]).

2. *Comme A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) (Corollaire 15.1 (ii) du cours 15 [3]). Le vecteur $\overrightarrow{n}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$, non nul, est aussi orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, comme $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (Théorème 15.11 (i) du cours 15 [3] et Théorème*

14.17 (ii) du cours 14 [2]) : il est normal à (ABC). Par le Théorème 15.10 (i) du cours 15 [3], une équation de (ABC) est $(x-1)+y+(z-2)=0$, soit

$$x+y+z-3=0.$$

Contrôle : $2+1+0-3=0$ pour B, et $0+2+1-3=0$ pour C.

3. *Par le Corollaire 15.1 (ii) du cours 15 [3] et le Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2], l'aire du triangle ABC est*

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\frac{\sqrt{27}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Contrôle (Théorème 15.11 (iii) du cours 15) : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=6$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+2+2=3$ (Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3]), et $6\times 6-3^2=27=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|^2$.

4. *Pour D : $3-1+1-3=0$, donc $D\in(ABC)$. Pour E : $1+1+2-3=1\neq 0$, donc $E\notin(ABC)$.*

5 Positions relatives

Exercice 17 *Dans un repère orthonormé de l'espace, déterminer si les plans $\mathcal{P}_1 : x-y+z-2=0$ et $\mathcal{P}_2 : 2x-2y+2z-6=0$ sont sécants, strictement parallèles ou confondus.*

Solution 17 *Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n}_1(1,-1,1)$ et $\overrightarrow{n}_2(2,-2,2)$. Comme $\overrightarrow{n}_2=2\overrightarrow{n}_1$, ces vecteurs sont colinéaires : les plans sont parallèles (Théorème 15.13 (i) du cours 15 [3]).*

En divisant par 2 (Remarque 15.4 du cours 15 [3]), $\mathcal{P}_2$ a aussi pour équation $x-y+z-3=0$. Si un point $M(x,y,z)$ était dans les deux plans, on aurait $x-y+z=2$ et $x-y+z=3$, ce qui est impossible. Les plans n'ont aucun point commun : ils sont strictement parallèles (Théorème 15.13 (i) du cours 15 [3]). Par exemple, le point $(2,0,0)$ est dans $\mathcal{P}_1$ et non dans $\mathcal{P}_2$.

Exercice 18 *Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les plans $\mathcal{P}_1 : x+y+z-6=0$, $\mathcal{P}_2 : x-y+2z-3=0$ et $\mathcal{P}_3 : 2x+3y-z-1=0$.*

1. *Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, et donner un vecteur directeur de leur droite d'intersection Δ.*

2. *En déduire que les trois plans ont un point commun et un seul.*

3. *Déterminer ce point.*

Solution 18 *Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], les trois plans ont pour vecteurs normaux $\overrightarrow{n}_1(1,1,1)$, $\overrightarrow{n}_2(1,-1,2)$ et $\overrightarrow{n}_3(2,3,-1)$.*

1. *Le repère étant orthonormé direct, la Définition 15.7 du cours 15 [3] donne les coordonnées de* $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$ *:*

$$1 \times 2 - 1 \times (-1) = 3, \quad 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1, \quad 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2.$$

Ce vecteur $(3, -1, -2)$ *n'est pas nul, donc* $\overrightarrow{n}_1$ *et* $\overrightarrow{n}_2$ *ne sont pas colinéaires (Théorème 15.11 (iv) du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.13 (ii) du cours 15 [3],* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *sont sécants, et leur droite d'intersection* Δ *a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{w}\,(3, -1, -2)$*.*

2. *Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],* $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n}_3 = 6 - 3 + 2 = 5 \neq 0$*. Par le Théorème 15.12 (ii) du cours 15 [3],* Δ *et* $\mathcal{P}_3$ *ont un point commun et un seul. Les points communs aux trois plans sont exactement les points communs à* Δ *et à* $\mathcal{P}_3$ *: il y en a un et un seul.*

3. *On note* L_1*,* L_2*,* L_3 *les équations* $x+y+z = 6$*,* $x-y+2z = 3$*,* $2x+3y-z = 1$*. Le système* (L_1, L_2, L_3) *a les mêmes solutions que le système formé de* L_1*, de* $L_1 - L_2$ *et de* $2L_1 - L_3$ *: on passe du premier au second en combinant des équations, et l'on revient au premier par* $L_2 = L_1 - (L_1 - L_2)$ *et* $L_3 = 2L_1 - (2L_1 - L_3)$*. Ces deux nouvelles équations sont*

$$2y - z = 3, \qquad -y + 3z = 11.$$

La première donne $z = 2y - 3$*, et la seconde devient* $-y + 6y - 9 = 11$*, soit* $5y = 20$*. Donc* $y = 4$*,* $z = 5$*, puis* $x = 6 - y - z = -3$ *par* L_1*. Le point commun aux trois plans est*

$$(-3, 4, 5)\,.$$

Contrôle : $-3 + 4 + 5 = 6$*,* $-3 - 4 + 10 = 3$ *et* $-6 + 12 - 5 = 1$*.*

Exercice 19 *Dans un repère orthonormé direct de l'espace, on considère les plans* $\mathcal{P}_1 : x + 2y - z = 0$ *et* $\mathcal{P}_2 : 2x - y + 3z - 7 = 0$*. Montrer que ces plans sont sécants, et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection* Δ*.*

Solution 19 ***Étape 1 : les plans sont sécants.*** *Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3],* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *ont pour vecteurs normaux* $\overrightarrow{n}_1\,(1, 2, -1)$ *et* $\overrightarrow{n}_2\,(2, -1, 3)$*. Le repère étant orthonormé direct, la Définition 15.7 du cours 15 [3] donne les coordonnées de* $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$ *:*

$$2 \times 3 - (-1) \times (-1) = 5, \quad (-1) \times 2 - 1 \times 3 = -5, \quad 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5.$$

Ce vecteur $(5, -5, -5)$ *n'est pas nul, donc* $\overrightarrow{n}_1$ *et* $\overrightarrow{n}_2$ *ne sont pas colinéaires (Théorème 15.11 (iv) du cours 15 [3]). Par le Théorème 15.13 (ii) du cours 15 [3], les plans sont sécants, et leur droite d'intersection* Δ *a pour vecteur directeur* $(5, -5, -5)$*, donc aussi* $\overrightarrow{w}\,(1, -1, -1) = \frac{1}{5}\,(5, -5, -5)$ *(Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]).*

Étape 2 : un point de Δ. *Cherchons un point commun aux deux plans d'abscisse $x = 0$: les équations deviennent $2y - z = 0$ et $-y + 3z = 7$. La première donne $z = 2y$, et la seconde $5y = 7$. Donc $y = \frac{7}{5}$ et $z = \frac{14}{5}$: le point $A\left(0, \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$ est sur Δ.*

Étape 3 : la représentation paramétrique. *La droite Δ est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [2]). Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], une représentation paramétrique de Δ est*

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{7}{5} - t \\ z = \frac{14}{5} - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Contrôle : pour tout réel t, $t + 2\left(\frac{7}{5} - t\right) - \left(\frac{14}{5} - t\right) = 0$ et $2t - \left(\frac{7}{5} - t\right) + 3\left(\frac{14}{5} - t\right) - 7 = \frac{-7+42-35}{5} = 0$.

Exercice 20 *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

et le plan $\mathcal{P} : x - 2y + z - 5 = 0$. Montrer que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un point commun et un seul, et le déterminer.

Solution 20 *Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A\,(1, 0, 4)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(2, -3, -1)$. Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1, -2, 1)$. Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15,*

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n} = 2 + 6 - 1 = 7 \neq 0,$$

donc $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un point commun et un seul (Théorème 15.12 (ii) du cours 15 [3]). Le point de paramètre t de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$(1 + 2t) - 2\,(-3t) + (4 - t) - 5 = 0,$$

c'est-à-dire $7t = 0$, soit $t = 0$. Le point commun est donc $(1, 0, 4)$. Contrôle : $1 - 0 + 4 - 5 = 0$.

Exercice 21 *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x = 2 + s \\ y = -1 + 3s \\ z = 4s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R},$$

et le plan $\mathcal{P} : 2x - 3y + 6z - 12 = 0$. On dit qu'une droite et un plan sont perpendiculaires *lorsqu'un vecteur directeur de la droite est colinéaire à un vecteur normal au plan.*

1. *La droite $\mathcal{D}$ est-elle parallèle au plan $\mathcal{P}$? Déterminer les points communs à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{P}$.*

2. *La droite $\mathcal{D}$ est-elle perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$?*

Solution 21 *Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], $\mathcal{D}$ est la droite passant par $A\,(2,-1,0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\,(1,3,4)$. Par le Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3], $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2,-3,6)$.*

1. *Par le Théorème 15.2 (ii) du cours 15 [3],*

$$\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}=1\times 2+3\times(-3)+4\times 6=2-9+24=17\neq 0.$$

Par la Définition 15.8 (i) du cours 15, lue avec le Théorème 15.9 (ii) du cours 15, $\mathcal{D}$ n'est donc pas parallèle à $\mathcal{P}$, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un point commun et un seul (Théorème 15.12 (ii) du cours 15 [3]). Le point de paramètre s de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$2\,(2+s)-3\,(-1+3s)+6\times 4s-12=0,$$

c'est-à-dire $17s-5=0$, soit $s=\frac{5}{17}$. Le point commun est

$$\left(2+\frac{5}{17},-1+\frac{15}{17},\frac{20}{17}\right)=\left(\frac{39}{17},-\frac{2}{17},\frac{20}{17}\right).$$

Contrôle : $\frac{2\times 39-3\times(-2)+6\times 20}{17}=\frac{204}{17}=12$.

2. *Tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est colinéaire à $\overrightarrow{w}$ (Théorème 14.5 (i) du cours 14 [2]), et tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$ (Théorème 15.9 (iv) du cours 15 [3]) : il suffit de savoir si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Comme $\overrightarrow{n}\neq\overrightarrow{0}$, c'est le cas si et seulement si $\overrightarrow{w}=k\overrightarrow{n}$ pour un réel k (Théorème 14.4 (ii) du cours 14 [2]), c'est-à-dire $1=2k$, $3=-3k$ et $4=6k$. La première égalité impose $k=\frac{1}{2}$, et la deuxième $k=-1$: aucun réel k ne convient. La droite $\mathcal{D}$ n'est donc pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$: elle coupe $\mathcal{P}$ en un seul point sans lui être perpendiculaire.*

6 Distances et sphère

Exercice 22 *Cet exercice calcule une distance dans l'espace, puis une distance dans le plan.*

1. *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P}$: $2x+y-2z+4=0$ et le point $A\,(1,1,-1)$. Calculer la distance $d\,(A,\mathcal{P})$, puis déterminer le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$.*

2. *Dans un repère orthonormé du plan, calculer la distance du point $M_0\,(2,-1)$ à la droite $\mathcal{D}$: $4x-3y+4=0$.*

Solution 22

1. *Le repère est orthonormé et* $(2,1,-2) \neq (0,0,0)$. *Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3],*

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|2\times 1+1-2\times(-1)+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Par la Définition 15.9 du cours 15, H *est le point commun à* $\mathcal{P}$ *et à la droite passant par* A *de vecteur directeur* $\overrightarrow{n}(2,1,-2)$, *normal à* $\mathcal{P}$ *(Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3]). Par le Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2], les points de cette droite sont les points* $(1+2t, 1+t, -1-2t)$, $t \in \mathbb{R}$ *; un tel point est dans* $\mathcal{P}$ *si et seulement si*

$$2(1+2t)+(1+t)-2(-1-2t)+4=0,$$

c'est-à-dire $9t+9=0$, *soit* $t=-1$. *Donc* $H(-1,0,1)$. *Contrôle :* $-2+0-2+4=0$, *donc* $H \in \mathcal{P}$, *et* $AH = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3$ *(Théorème 14.18 (ii) du cours 14 [2]), la distance trouvée.*

2. *L'équation est* $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ *avec* $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$, *et* $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. *Le repère étant orthonormé, le Corollaire 15.2 du cours 15 [3] donne*

$$d(M_0,\mathcal{D}) = \frac{|4\times 2-3\times(-1)+4|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Exercice 23 *Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère l'ensemble* $\mathcal{S}$ *des points* $M(x,y,z)$ *tels que*

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-19=0.$$

1. *Montrer que* $\mathcal{S}$ *est une sphère, dont on donnera le centre* Ω *et le rayon* R.

2. *Quel est l'ensemble des points* $M(x,y,z)$ *tels que* $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6=0$ *?*

3. *Montrer que le plan* $\mathcal{P}: 2x-y+2z+11=0$ *coupe* $\mathcal{S}$ *selon un cercle, dont on donnera le centre et le rayon.*

4. *Montrer que le plan* $\mathcal{Q}: z-4=0$ *est tangent à* $\mathcal{S}$, *et donner le point de contact.*

5. *Le plan* $\mathcal{P}': x-7=0$ *a-t-il des points communs avec* $\mathcal{S}$ *?*

Solution 23

1. *L'équation s'écrit* $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+e=0$ *avec* $a=1$, $b=2$, $c=-1$ *et* $e=-19$. *Alors* $k = a^2+b^2+c^2-e = 1+4+1+19 = 25 > 0$. *Le repère étant orthonormé, le Théorème 15.17 (ii) du cours 15 [3] dit que* $\mathcal{S}$ *est la sphère de centre* $\Omega(1,2,-1)$ *et de rayon* $R = \sqrt{25} = 5$.

2. *Ici* $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$ *et* $e = 6$, *donc* $k = 1+4+0-6 = -1 < 0$. *Par le Théorème 15.17 (ii) du cours 15 [3], cet ensemble est vide : ce n'est pas une sphère.*

3. *Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3], la distance de* Ω *à* $\mathcal{P}$ *est*

$$h = \frac{|2 \times 1 - 2 + 2 \times (-1) + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Comme $h < R$, *le Théorème 15.18 (iii) du cours 15 [3] dit que* $\mathcal{P}$ *coupe* $\mathcal{S}$ *selon un cercle de* $\mathcal{P}$, *dont le centre est le projeté orthogonal* H *de* Ω *sur* $\mathcal{P}$ *et dont le rayon est* $\sqrt{R^2 - h^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. *Comme dans l'exercice 22,* H *est le point de* $\mathcal{P}$ *de la forme* $(1 + 2t, 2 - t, -1 + 2t)$ *(Définition 15.9 du cours 15 [3], Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2]), avec*

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 2(-1 + 2t) + 11 = 0,$$

c'est-à-dire $9t + 9 = 0$, *soit* $t = -1$. *Le centre du cercle est donc* $H(-1, 3, -3)$. *Contrôle :* $-2 - 3 - 6 + 11 = 0$.

4. *Le plan* $\mathcal{Q}$ *a pour équation* $0x + 0y + 1z - 4 = 0$. *Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3], la distance de* Ω *à* $\mathcal{Q}$ *est* $|-1 - 4| = 5 = R$, *car* $\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$. *Par le Théorème 15.18 (ii) du cours 15 [3],* $\mathcal{Q}$ *est tangent à* $\mathcal{S}$, *au projeté orthogonal* H' *de* Ω *sur* $\mathcal{Q}$. *La droite passant par* Ω *de vecteur directeur* $(0, 0, 1)$, *normal à* $\mathcal{Q}$ *(Théorème 15.10 (ii) du cours 15 [3]), est formée des points* $(1, 2, -1 + t)$ *(Théorème 14.16 (i) du cours 14 [2]) ; un tel point est dans* $\mathcal{Q}$ *si et seulement si* $t = 5$. *Le point de contact est donc* $H'(1, 2, 4)$. *Contrôle :* $1+4+16-2-8+8-19 = 0$, *donc* $H' \in \mathcal{S}$.

5. *Par le Théorème 15.16 (ii) du cours 15 [3], la distance de* Ω *à* $\mathcal{P}'$ *est* $|1 - 7| = 6 > R$. *Par le Théorème 15.18 (i) du cours 15 [3],* $\mathcal{P}'$ *et* $\mathcal{S}$ *n'ont aucun point commun.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.