Exercices type Bac & Solutions : Dénombrement, Combinatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 17.6 du cours 17* désigne un énoncé numéroté du cours 17 [2], sur le dénombrement. Les renvois au cours 7 désignent de même des énoncés numérotés du cours sur les probabilités [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est noté $\text{Card}\,(E)$ (Définition 17.1 du cours 17 [2]). On note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, pour $0 \leq p \leq n$ (Théorème 17.6 du cours 17 [2]). Avant chaque calcul, on dit quel modèle on emploie : l'ordre compte-t-il, un élément peut-il être répété ? Dans ces exercices, un *mot* est une suite de lettres, qu'elle ait un sens ou non.

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble fini **1**

2 Listes **3**

3 Arrangements et permutations **4**

4 Combinaisons **5**

5 Propriétés des coefficients binomiaux **8**

6 Tirages **10**

1 Cardinal d'un ensemble fini

Exercice 1 *On note* $E = \{1, 2, \ldots, 100\}$*, A l'ensemble des éléments de E divisibles par* 2*, et B l'ensemble des éléments de E divisibles par* 5*.*

1. *Calculer* $\text{Card}\,(A)$*,* $\text{Card}\,(B)$ *et* $\text{Card}\,(A \cap B)$*.*
2. *Combien d'entiers de* 1 *à* 100 *sont divisibles par* 2 *ou par* 5 *?*

3. *Combien d'entiers de* 1 *à* 100 *ne sont divisibles ni par* 2 *ni par* 5 *?*

4. *Combien d'entiers de* 1 *à* 100 *sont divisibles par exactement un des deux nombres* 2 *et* 5 *?*

Solution 1

1. *Les éléments de* A *sont les entiers* $2k$ *avec* $k \in \{1, \dots, 50\}$*, car* $1 \leq 2k \leq 100$ *équivaut à* $1 \leq k \leq 50$ *pour* k *entier. L'application* $k \mapsto 2k$ *est une bijection de* $\{1, \dots, 50\}$ *sur* A*, donc* $\mathrm{Card}\,(A) = 50$ *(Remarque 17.1 du cours 17 [2]). De même,* $k \mapsto 5k$ *est une bijection de* $\{1, \dots, 20\}$ *sur* B*, donc* $\mathrm{Card}\,(B) = 20$*.*

   Un multiple de 10 *est divisible par* 2 *et par* 5*. Réciproquement, si* $n \in A \cap B$*, on écrit* $n = 5b$ *avec* b *entier ; si* b *était impair,* $n = 5b$ *serait impair, comme produit de deux entiers impairs ; donc* b *est pair,* $b = 2c$*, et* $n = 10c$*. Ainsi* $A \cap B$ *est l'ensemble des multiples de* 10 *compris entre* 1 *et* 100*, en bijection avec* $\{1, \dots, 10\}$ *par* $k \mapsto 10k$ *:* $\mathrm{Card}\,(A \cap B) = 10$*.*

2. *On cherche* $\mathrm{Card}\,(A \cup B)$*. Par le Théorème 17.1 (ii) du cours 17 [2],*

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) = 50 + 20 - 10 = 60.$$

3. *Ce sont les éléments du complémentaire de* $A \cup B$ *dans* E*. Par le Théorème 17.1 (i) du cours 17 [2], il y en a* $100 - 60 = 40$*.*

4. *L'ensemble* $A \cup B$ *est la réunion de* $A \cap B$ *et de l'ensemble* D *des entiers divisibles par exactement un des deux nombres, et ces deux parties sont disjointes. Par la Propriété 17.1 (iii) du cours 17 [2],* $\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A \cap B) + \mathrm{Card}\,(D)$*, donc* $\mathrm{Card}\,(D) = 60 - 10 = 50$*.*

Exercice 2 *On s'intéresse aux entiers naturels qui s'écrivent avec trois chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre n'étant pas* 0 *(par exemple* 305*, mais ni* 035 *ni* 303*).*

1. *Combien y a-t-il de tels entiers ?*

2. *Combien d'entre eux sont pairs ?*

Solution 2

1. *Un tel entier est donné par le triplet (chiffre des centaines, chiffre des dizaines, chiffre des unités), que l'on choisit en trois étapes. Le chiffre des centaines se choisit parmi* $1, \dots, 9$ *:* 9 *possibilités. Quel que soit ce premier chiffre, le chiffre des dizaines se choisit parmi les* 10 *chiffres sauf celui-ci :* 9 *possibilités (*0 *est permis). Quels que soient les deux premiers chiffres, distincts, le chiffre des unités se choisit parmi les* 8 *chiffres restants. Les possibilités de chaque étape dépendent des choix précédents, mais pas leur nombre : par le Théorème 17.3 du cours 17 [2], il y a* $9 \times 9 \times 8 = 648$ *tels entiers.*

2. *Un tel entier est pair si et seulement si son chiffre des unités est* 0, 2, 4, 6 *ou* 8. *Si l'on choisissait d'abord ce chiffre, le nombre de possibilités pour le chiffre des centaines serait* 9 *quand les unités valent* 0, *et* 8 *sinon : il dépendrait du premier choix, et le Théorème 17.3 du cours 17 [2] ne s'appliquerait pas directement. On sépare donc deux cas disjoints.*

   - *Chiffre des unités égal à* 0 *: on choisit ensuite le chiffre des centaines parmi* $1, \ldots, 9$ *(*9 *possibilités), puis celui des dizaines parmi les* 8 *chiffres restants, soit* $9 \times 8 = 72$ *entiers (Théorème 17.3 du cours 17 [2]).*
   - *Chiffre des unités dans* $\{2, 4, 6, 8\}$ *:* 4 *possibilités ; puis, quel que soit ce chiffre, le chiffre des centaines est non nul et différent de lui (*8 *possibilités) ; puis le chiffre des dizaines est différent des deux précédents (*8 *possibilités,* 0 *compris). Cela donne* $4 \times 8 \times 8 = 256$ *entiers (Théorème 17.3 du cours 17 [2]).*

   Par le Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2], il y a $72 + 256 = 328$ *entiers pairs.*

2 Listes

Exercice 3 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Combien de* 3*-listes d'éléments de* E *peut-on former ?*

Solution 3 *Une* 3*-liste d'éléments de* E *est un élément de* E^3 *: l'ordre compte, et un même élément peut figurer plusieurs fois (Définition 17.2 du cours 17 [2]). Comme* $\mathrm{Card}\,(E) = 5$, *le Théorème 17.4 du cours 17 [2] donne* $5^3 = 125$ *listes.*

Exercice 4 *Combien de codes de* 4 *chiffres peut-on former avec les chiffres* 1 *à* 6, *si les chiffres peuvent se répéter ?*

Solution 4 *Un code est une suite de* 4 *chiffres pris dans* $\{1, \ldots, 6\}$ *: l'ordre compte (les codes* 1123 *et* 3211 *sont différents), et les répétitions sont permises. C'est une* 4*-liste d'éléments d'un ensemble à* 6 *éléments ; par le Théorème 17.4 du cours 17 [2], il y a* $6^4 = 1\,296$ *codes.*

Exercice 5 *Combien de mots de* 5 *lettres peut-on former avec les lettres A, B, C, D, E, F, si chaque lettre peut être utilisée plusieurs fois ?*

Solution 5 *Un tel mot est une suite ordonnée de* 5 *lettres prises dans un ensemble à* 6 *éléments, avec répétition possible : c'est une* 5*-liste (Définition 17.2 du cours 17 [2]). Il y en a* $6^5 = 7\,776$ *(Théorème 17.4 du cours 17 [2]).*

3 Arrangements et permutations

Exercice 6 *Combien de mots de* 3 *lettres deux à deux distinctes peut-on former avec les lettres du mot ABSOLUMENT ?*

Solution 6 *Le mot ABSOLUMENT s'écrit avec les* 10 *lettres deux à deux distinctes A, B, S, O, L, U, M, E, N, T. Un mot de* 3 *lettres distinctes prises parmi elles est une* 3*-liste d'éléments deux à deux distincts : l'ordre compte, sans répétition. C'est un arrangement de* 3 *éléments d'un ensemble à* 10 *éléments (Définition 17.4 du cours 17 [2]). Comme* $1 \leq 3 \leq 10$*, le Théorème 17.5 (i) du cours 17 [2] donne*

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

mots.

Exercice 7 *Combien d'entiers de* 4 *chiffres deux à deux distincts, pris parmi* $1, 2, \ldots, 9$*, commencent par le chiffre* 5 *?*

Solution 7 *Un tel entier s'écrit* $5abc$*, où* (a, b, c) *est une* 3*-liste de chiffres deux à deux distincts pris parmi les* 8 *chiffres* $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$*. L'application qui efface le premier chiffre est une bijection de l'ensemble des entiers cherchés sur l'ensemble des arrangements de* 3 *éléments de* $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ *; sa réciproque ajoute le chiffre* 5 *en tête. Par la Remarque 17.1 et le Théorème 17.5 (i) du cours 17 [2], avec* $1 \leq 3 \leq 8$*, il y a*

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

tels entiers.

Exercice 8

1. *Combien d'anagrammes a le mot LIVRE ?*
2. *Combien de ces anagrammes commencent et finissent par une consonne ?*

Solution 8

1. *Les* 5 *lettres de LIVRE sont deux à deux distinctes. Une anagramme est une façon de ranger ces* 5 *lettres dans un ordre, chacune une fois : c'est une permutation de l'ensemble* $\{L, I, V, R, E\}$ *(Définition 17.5 du cours 17 [2]). Par le Corollaire 17.1 du cours 17, il y en a* $5! = 120$*, comme dans l'Exemple 17.5 du cours 17 [2].*

2. *Les consonnes sont L, V, R, et les voyelles I, E. On choisit la première lettre parmi les* 3 *consonnes (*3 *possibilités), puis la dernière parmi les* 2 *consonnes restantes (*2 *possibilités), puis on range les* 3 *lettres restantes dans les* 3 *places du milieu (*$3! = 6$ *possibilités, Corollaire 17.1 du cours 17 [2]). À chaque étape, le nombre de possibilités ne dépend pas des choix précédents : par le Théorème 17.3 du cours 17 [2], il y a* $3 \times 2 \times 6 = 36$ *telles anagrammes.*

Exercice 9 *Combien d'anagrammes a le mot MISSISSIPPI ?*

Solution 9 *Le mot MISSISSIPPI a* 11 *lettres : la lettre I apparaît* 4 *fois, la lettre S apparaît* 4 *fois, la lettre P apparaît* 2 *fois, et la lettre M n'apparaît qu'une fois* ($4+4+2+1=11$)*. Les lettres n'étant pas distinctes, une anagramme n'est pas une permutation d'un ensemble à* 11 *éléments ; on la compte par les places de chaque lettre.*

Une anagramme est déterminée par les 4 *places des I parmi les* 11 *places, puis les* 4 *places des S parmi les* 7 *places restantes, puis les* 2 *places des P parmi les* 3 *places restantes ; la place de M est alors la dernière place libre. Les places d'une lettre forment une partie (l'ordre ne compte pas, car les I sont identiques), et le nombre de possibilités de chaque étape ne dépend pas des places déjà choisies. Inversement, chaque suite de tels choix de places donne une anagramme et une seule : les anagrammes correspondent donc exactement aux choix comptés (Remarque 17.1 du cours 17 [2]). Par le Théorème 17.6 et le Théorème 17.3 du cours 17 [2], le nombre d'anagrammes est*

$$\binom{11}{4} \times \binom{7}{4} \times \binom{3}{2} = 330 \times 35 \times 3 = 34\,650.$$

C'est la valeur $11!/(4! \times 4! \times 2! \times 1!)$ *donnée à la fin de l'Exemple 17.6 du cours 17 [2].*

Exercice 10 *Les* 26 *lettres de l'alphabet comprennent les* 5 *voyelles a, e, i, o, u, les* 21 *autres lettres étant appelées ici consonnes. Combien de mots de* 26 *lettres, où chaque lettre de l'alphabet figure exactement une fois, peut-on écrire si les* 5 *voyelles a, e, i, o, u doivent y apparaître dans l'ordre alphabétique ?*

Solution 10 *On construit un tel mot en deux étapes.*

- *On choisit l'ensemble des* 5 *places des voyelles parmi les* 26 *places : c'est une partie à* 5 *éléments d'un ensemble à* 26 *éléments, donc* $\binom{26}{5}$ *possibilités (Théorème 17.6 du cours 17 [2]). Les voyelles y sont alors placées d'une seule façon, puisque leur ordre est imposé : a à la première de ces places, e à la deuxième, et ainsi de suite.*
- *On range les* 21 *consonnes dans les* 21 *places restantes : c'est une permutation des* 21 *consonnes, donc* 21! *possibilités (Corollaire 17.1 du cours 17 [2]), quel que soit le choix de la première étape.*

Par le Théorème 17.3 du cours 17 [2], le nombre de mots est

$$\binom{26}{5} \times 21! = \frac{26!}{5!\,21!} \times 21! = \frac{26!}{5!} = 3\,360\,762\,176\,055\,046\,963\,200\,000.$$

4 Combinaisons

Exercice 11 *Soit* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*. Combien E a-t-il de parties à* 3 *éléments ? Les énumérer.*

Solution 11 *Une partie à 3 éléments de E est une combinaison de 3 éléments de E : l'ordre ne compte pas, sans répétition (Définition 17.6 du cours 17 [2]). Comme $0 \leq 3 \leq 5$, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] en donne*

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Ce sont, rangées par plus petit élément : $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$.

Exercice 12 *Dans une classe de 30 élèves, combien de comités de 4 élèves peut-on former ? Les membres d'un comité n'ont pas de rôle particulier.*

Solution 12 *Un comité est un ensemble de 4 élèves : l'ordre ne compte pas, et un élève ne peut y figurer deux fois. C'est une partie à 4 éléments de l'ensemble des 30 élèves. Comme $0 \leq 4 \leq 30$, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\binom{30}{4} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 27\,405$$

comités.

Exercice 13 *Une main de 5 cartes est un ensemble de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains de 5 cartes ?*

Solution 13 *Une main est une partie à 5 éléments de l'ensemble des 52 cartes : l'ordre ne compte pas, sans répétition. Comme $0 \leq 5 \leq 52$, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] donne*

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,598\,960$$

mains.

Exercice 14 *Une classe de terminale organise une sortie culturelle et forme des groupes de travail pour la préparer. La classe compte 15 élèves : 8 filles et 7 garçons. Les membres d'un groupe n'ont pas de rôle particulier.*

1. *Combien de groupes de 4 élèves peut-on former ?*
2. *Combien de groupes de 4 élèves composés uniquement de filles peut-on former ?*
3. *Combien de groupes formés de 2 filles et 2 garçons peut-on former ?*
4. *Combien de groupes de 3 élèves contenant au moins une fille peut-on former ?*

Solution 14 *Un groupe est une partie de l'ensemble des élèves : l'ordre ne compte pas, sans répétition.*

1. *Les groupes de* 4 *élèves sont les parties à* 4 *éléments d'un ensemble à* 15 *éléments. Comme* $0 \leq 4 \leq 15$*, le Théorème 17.6 du cours 17 [2] en donne*

$$\binom{15}{4} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1\,365.$$

2. *Ce sont les parties à* 4 *éléments de l'ensemble des* 8 *filles. Comme* $0 \leq 4 \leq 8$*, il y en a*

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

(Théorème 17.6 du cours 17 [2]).

3. *Un tel groupe est la donnée d'une partie à* 2 *éléments des* 8 *filles et d'une partie à* 2 *éléments des* 7 *garçons : l'application qui associe au couple de ces deux parties leur réunion est une bijection sur l'ensemble des groupes cherchés, car on retrouve les filles et les garçons d'un groupe. Par la Remarque 17.1, le Théorème 17.2 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2], avec* $2 \leq 8$ *et* $2 \leq 7$*, il y a*

$$\binom{8}{2} \times \binom{7}{2} = 28 \times 21 = 588$$

groupes.

4. *Les groupes de* 3 *élèves sont les parties à* 3 *éléments des* 15 *élèves : il y en a* $\binom{15}{3} = 455$*, car* $0 \leq 3 \leq 15$ *(Théorème 17.6 du cours 17 [2]). Parmi eux, ceux qui ne contiennent aucune fille sont les parties à* 3 *éléments des* 7 *garçons : il y en a* $\binom{7}{3} = 35$*, car* $3 \leq 7$*. Les groupes contenant au moins une fille forment le complémentaire de ces derniers ; par le Théorème 17.1 (i) du cours 17 [2], il y en a* $455 - 35 = 420$*.*

Exercice 15 *Pour chacune des situations suivantes, dire si l'ordre compte et si les répétitions sont permises, reconnaître le modèle (liste, arrangement ou combinaison), puis compter.*

1. *Un cadenas s'ouvre avec un code de* 3 *chiffres, pris parmi* $0, 1, \ldots, 9$*, un même chiffre pouvant figurer plusieurs fois. Combien y a-t-il de codes ?*

2. *Une course réunit* 12 *coureurs. Combien y a-t-il de podiums (premier, deuxième, troisième) possibles, sans ex æquo ?*

3. *Combien de comités de* 3 *membres, sans rôle particulier, peut-on choisir parmi ces* 12 *coureurs ?*

Solution 15

1. *L'ordre compte (*123 *et* 321 *sont deux codes différents) et un chiffre peut être répété (*007 *est un code). Un code est une* 3*-liste d'éléments d'un ensemble à* 10 *éléments (Définition 17.2 du cours 17 [2]). Il y en a* $10^3 = 1\,000$ *(Théorème 17.4 du cours 17 [2]).*

2. *L'ordre compte (être premier ou deuxième n'est pas la même chose) et un coureur ne peut occuper deux places. Un podium est un arrangement de* 3 *éléments d'un ensemble à* 12 *éléments (Définition 17.4 du cours 17 [2]). Comme* $1 \leq 3 \leq 12$*, il y en a* $A_{12}^3 = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ *(Théorème 17.5 (i) du cours 17 [2]).*

3. *L'ordre ne compte pas et un coureur ne peut figurer deux fois. Un comité est une partie à* 3 *éléments d'un ensemble à* 12 *éléments (Définition 17.6 du cours 17 [2]). Comme* $0 \leq 3 \leq 12$*, il y en a*

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

(Théorème 17.6 du cours 17 [2]). On a bien $1\,320 = 3! \times 220$ *: chaque comité donne* $3!$ *podiums, un par ordre de ses membres.*

Le modèle se lit dans l'énoncé, comme dans le tableau récapitulatif du cours 17 [2] (section 17.4) : liste si l'ordre compte avec répétition, arrangement si l'ordre compte sans répétition, combinaison si l'ordre ne compte pas, sans répétition.

5 Propriétés des coefficients binomiaux

Exercice 16 *Construire le triangle de Pascal de la ligne* $n = 0$ *à la ligne* $n = 5$*.*

Solution 16 *La ligne* n *contient* $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$*. Ses deux extrémités valent* 1 *(Théorème 17.7 (i) du cours 17 [2]), ce qui donne les lignes* $n = 0$ *et* $n = 1$*. Pour* $n \geq 2$ *et* $1 \leq p \leq n - 1$*, la formule de Pascal* $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ *(Théorème 17.7 (iii) du cours 17 [2]) donne chaque autre nombre comme la somme du nombre situé au-dessus et de celui situé au-dessus à gauche dans la ligne* $n - 1$*. On obtient :*

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Par exemple, à la ligne $n = 5$*,* $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$*.*

Exercice 17

1. *Calculer* $\binom{4}{2}$ *à l'aide de la formule de Pascal et de la ligne* $n = 3$ *du triangle de Pascal.*

2. *Calculer de même* $\binom{6}{2}$ *et* $\binom{6}{3}$ *à partir de la ligne* $n = 5$*.*

Solution 17 *On applique la formule de Pascal (Théorème 17.7 (iii) du cours 17 [2]), valable ici car $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$, et les lignes $n = 3$ et $n = 5$ obtenues à l'exercice 16.*

1. $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$.
2. $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$ *et* $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$.

Exercice 18 *Développer $(x+2)^4$, pour x réel, à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

Solution 18 *Par le Théorème 17.8 du cours 17 [2], appliqué à x et $y = 2$ avec $n = 4$,*

$$(x+2)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} x^k 2^{4-k}.$$

La ligne $n = 4$ du triangle de Pascal donne les coefficients $1, 4, 6, 4, 1$ (exercice 16). Donc

$$(x+2)^4 = 16 + 4 \times 8\,x + 6 \times 4\,x^2 + 4 \times 2\,x^3 + x^4 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16.$$

Contrôle en $x = 1$: $3^4 = 81 = 1 + 8 + 24 + 32 + 16$.

Exercice 19

1. *Calculer le coefficient de x^2y^3 dans le développement de $(x+y)^5$, pour x, y réels.*
2. *Calculer le coefficient de x^2y^3 dans le développement de $(2x-y)^5$.*

Solution 19

1. *Par le Théorème 17.8 du cours 17 [2], $(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^k y^{5-k}$. Le terme en x^2y^3 est celui d'indice $k = 2$; son coefficient est $\binom{5}{2} = 10$ (ligne $n = 5$ du triangle de Pascal, exercice 16).*
2. *On applique le Théorème 17.8 du cours 17 [2] aux nombres $2x$ et $-y$: $(2x-y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x)^k (-y)^{5-k}$. Le terme en x^2y^3 est celui d'indice $k = 2$: $\binom{5}{2} (2x)^2 (-y)^3 = 10 \times 4 \times (-1)\, x^2y^3$. Le coefficient est -40.*

Exercice 20 *On considère le développement de $(x-2)^6$, pour x réel.*

1. *Trouver le terme constant de ce développement.*
2. *Trouver le coefficient de x^2.*

Solution 20 *Par le Théorème 17.8 du cours 17 [2], appliqué à x et $y = -2$ avec $n = 6$,*

$$(x-2)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} x^k (-2)^{6-k}.$$

1. *Le terme constant est celui d'indice* $k = 0$ *:* $\binom{6}{0}(-2)^6 = 64$.

2. *Le terme en* x^2 *est celui d'indice* $k = 2$ *; son coefficient est* $\binom{6}{2}(-2)^4 = 15 \times 16 = 240$, *avec* $\binom{6}{2} = 15$ *(exercice 17).*

Exercice 21 *Soit* $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$.

1. *Combien* E *a-t-il de parties ?*

2. *Combien de parties de* E *contiennent l'élément* 1 *?*

3. *Combien de parties de* E *ont un nombre pair d'éléments ?*

4. *Combien de parties de* E *ont au moins* 2 *éléments ?*

Solution 21

1. *Par le Théorème 17.9 du cours 17 [2],* $\mathcal{P}(E)$ *a* $2^{10} = 1\,024$ *éléments.*

2. *Soit* $F = \{2, \ldots, 10\}$, *qui a* 9 *éléments. L'application* $A \mapsto A \setminus \{1\}$ *envoie les parties de* E *contenant* 1 *sur les parties de* F *; c'est une bijection, de réciproque* $B \mapsto B \cup \{1\}$. *Par la Remarque 17.1 et le Théorème 17.9 du cours 17 [2], il y a* $2^9 = 512$ *parties de* E *contenant* 1.

3. *Soient* $S_0 = \binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \cdots + \binom{10}{10}$ *la somme des coefficients d'indice pair et* $S_1 = \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{9}$ *celle des coefficients d'indice impair. Les parties de* E *ayant un nombre pair d'éléments sont la réunion, pour* $k \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, *des ensembles de parties à* k *éléments, deux à deux disjoints : par le Théorème 17.1 (iii) et le Théorème 17.6 du cours 17 [2], il y en a* S_0. *Le Corollaire 17.2 du cours 17 [2], avec* $n = 10 \geq 1$, *donne* $S_0 + S_1 = 2^{10}$ *et* $S_0 - S_1 = 0$. *Donc* $S_0 = 2^9 = 512$.

4. *Les parties ayant moins de* 2 *éléments sont la partie vide et les* 10 *parties à un élément, soit* $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} = 1 + 10 = 11$ *parties (Théorème 17.7 (i) et Propriété 17.1 (iii) du cours 17 [2]). Par le Théorème 17.1 (i) du cours 17 [2], appliqué dans* $\mathcal{P}(E)$, *il y a* $1\,024 - 11 = 1\,013$ *parties ayant au moins* 2 *éléments.*

6 Tirages

Exercice 22 *Une urne contient* 10 *boules discernables :* 4 *blanches et* 6 *noires.*

1. *On tire simultanément et au hasard* 3 *boules de l'urne.*

   (a) *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*

   (b) *Combien de tirages contiennent exactement* 2 *boules blanches ?*

   (c) *Combien de tirages contiennent au moins une boule blanche ?*

   (d) *Combien de tirages contiennent au plus une boule blanche ?*

(e) *Calculer les probabilités des trois événements précédents.*

2. *On tire maintenant* 3 *boules successivement et au hasard, en remettant chaque boule dans l'urne avant de tirer la suivante. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.*

Solution 22

1. *Le tirage est simultané : un résultat est une partie à* 3 *éléments de l'ensemble des* 10 *boules (Remarque 17.6 (iii) du cours 17 [2]).*

   (a) *L'univers* Ω *est l'ensemble de ces parties ; comme* $0 \leq 3 \leq 10$, $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$ *(Théorème 17.6 du cours 17 [2]).*

   (b) *Un tel tirage est la donnée d'une partie à* 2 *éléments des* 4 *blanches et d'une partie à* 1 *élément des* 6 *noires, sa réunion avec la première redonnant le tirage, comme dans l'Exemple 17.9 du cours 17 [2]. Par la Remarque 17.1, le Théorème 17.2 et le Théorème 17.6 du cours 17 [2], avec* $2 \leq 4$ *et* $1 \leq 6$, *il y en a* $\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$.

   (c) *Le complémentaire de cet événement dans* Ω *est l'ensemble des tirages sans boule blanche, c'est-à-dire des parties à* 3 *éléments des* 6 *noires : il y en a* $\binom{6}{3} = 20$, *car* $3 \leq 6$. *Par le Théorème 17.1 (i) du cours 17, il y a* $120 - 20 = 100$ *tirages avec au moins une boule blanche (Remarque 17.7 du cours 17 [2]).*

   (d) *On sépare deux cas disjoints : aucune blanche (*20 *tirages) ou exactement une blanche, soit* $\binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$ *tirages, par le même argument qu'à la question 1 (b). Par le Théorème 17.1 (iii) du cours 17 [2], il y a* $20 + 60 = 80$ *tirages avec au plus une boule blanche.*

   (e) *Le tirage se fait au hasard : on munit* Ω *de la probabilité uniforme (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\,(\textit{exactement 2 blanches}) &= \frac{36}{120} = \frac{3}{10},\\
\mathbf{P}\,(\textit{au moins 1 blanche}) &= \frac{100}{120} = \frac{5}{6},\\
\mathbf{P}\,(\textit{au plus 1 blanche}) &= \frac{80}{120} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

2. *Les tirages sont successifs avec remise : un résultat est une* 3*-liste de boules (Remarque 17.6 (i) du cours 17 [2]). L'univers* Ω' *a* $10^3 = 1\,000$ *éléments (Théorème 17.4 du cours 17 [2]), et on le munit de la probabilité uniforme, car les tirages se font au hasard (Remarque 7.2 du cours 7 [1]). Les résultats sans boule blanche sont les* 3*-listes de boules noires : il y en a* $6^3 = 216$. *Par le Théorème 17.1 (i) du cours 17 [2],* $1\,000 - 216 = 784$ *résultats contiennent au moins une boule blanche, et, par le Théorème 7.2 du cours 7 [1],*

$$\mathbf{P}\,(\textit{au moins 1 blanche}) = \frac{784}{1\,000} = \frac{98}{125}.$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.