Exercices type Bac & Solutions : Les Matrices

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 18.7 du cours 18* désigne un énoncé numéroté du cours 18 [1], sur les matrices. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ce cours est disponible sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Les matrices sont à coefficients réels. On note I_n la matrice identité d'ordre n, ou I s'il n'y a pas d'ambiguïté, et A^{T} la transposée d'une matrice A (Définitions 18.2 et 18.3 du cours 18 [1]). Avant chaque produit AB, on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B (Remarque 18.1 du cours 18 [1]).

Table des matières

1 Matrices et premières opérations **1**

2 Produit de matrices **3**

3 Puissances d'une matrice carrée **4**

4 Déterminant et matrice inverse **5**

5 Systèmes linéaires **7**

6 Matrices diagonalisables et suites **9**

1 Matrices et premières opérations

Exercice 1 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. *Calculer la transposée de* A.

Solution 1 *Les lignes de* A *deviennent les colonnes de* A^{T} *(Définition 18.3 du cours 18 [1]) :*

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 *Soit la matrice* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. *Calculer la transposée de* B. *La matrice* B *est-elle symétrique ?*

Solution 2 *Par la Définition 18.3 du cours 18 [1], la première ligne* $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ *de* B *devient la première colonne de* B^{T}, *et la deuxième ligne* $\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$ *devient la deuxième colonne :*

$$B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = B.$$

La matrice B *est carrée et vérifie* $B^{\mathrm{T}} = B$ *: elle est symétrique (Définition 18.3 du cours 18 [1]).*

Exercice 3 *Calculer la somme des matrices* $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solution 3 *Les matrices* C *et* D *ont le même type* $(2, 2)$ *: leur somme est définie, et elle se calcule coefficient par coefficient (Définition 18.4 (i) du cours 18 [1]) :*

$$C + D = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+(-1) \\ 2+1 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *Soient* a, b, c, d *des réels, et les matrices*

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

Déterminer les réels a, b, c, d *tels que* $E + F = I_2$.

Solution 4 *Par la Définition 18.4 (i) du cours 18 [1],*

$$E + F = \begin{pmatrix} a-b & b+a \\ c-d & d+c \end{pmatrix}.$$

Deux matrices de même type sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux (Définition 18.1 du cours 18 [1]). Comme $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *on a* $E+F = I_2$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} c - d = 0 \\ c + d = 1. \end{cases}$$

Si $a - b = 1$ *et* $a + b = 0$, *la somme de ces deux équations donne* $2a = 1$, *donc* $a = \frac{1}{2}$, *puis* $b = -a = -\frac{1}{2}$. *Réciproquement,* $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ *et* $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. *De même, si* $c - d = 0$ *et* $c + d = 1$, *la somme donne* $2c = 1$, *donc* $c = \frac{1}{2}$, *puis* $d = c = \frac{1}{2}$ *; réciproquement, ces valeurs vérifient les deux équations.*

Il y a donc une seule solution :

$$a = c = d = \frac{1}{2}, \qquad b = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 5 *Calculer le produit de la matrice* $G = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ *par le réel* 3.

Solution 5 *On multiplie chaque coefficient de* G *par* 3 *(Définition 18.4 (ii) du cours 18 [1]) :*

$$3G = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 4 \\ 3 \times 6 & 3 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 *Soient* x, y, z, w *des réels et* $H = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. *Calculer le produit* $(-1)\,H$ *de la matrice* H *par le réel* -1.

Solution 6 *On multiplie chaque coefficient de* H *par* -1 *(Définition 18.4 (ii) du cours 18 [1]) :*

$$(-1)\,H = \begin{pmatrix} (-1) \times x & (-1) \times y \\ (-1) \times z & (-1) \times w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -w \end{pmatrix}.$$

C'est l'opposée $-H$ *de* H *(Définition 18.4 (iii) du cours 18 [1]).*

2 Produit de matrices

Exercice 7 *Soient les matrices* $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $Z = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer le produit* WZ.
2. *Calculer le produit* ZW. *Les matrices* W *et* Z *commutent-elles ?*

Solution 7 *Les matrices* W *et* Z *sont carrées d'ordre* 2 *: les produits* WZ *et* ZW *sont définis, et ce sont des matrices carrées d'ordre* 2 *(Remarque 18.1 et Définition 18.5 du cours 18 [1]).*

1. *On calcule ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [1]) :*

$$WZ = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

2. *De même,*

$$ZW = \begin{pmatrix} 5 \times 1 + 6 \times 3 & 5 \times 2 + 6 \times 4 \\ 7 \times 1 + 8 \times 3 & 7 \times 2 + 8 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients d'indices 1, 1 *diffèrent* ($19 \neq 23$)*, donc* $WZ \neq ZW$ *: les matrices* W *et* Z *ne commutent pas (Définition 18.6 du cours 18 [1]). C'est le premier piège de la Remarque 18.2 du cours 18 [1].*

Exercice 8 *Soient a, b, c, d, e, f, g, h des réels, et les matrices*

$$K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad et \qquad L = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Exprimer le produit KL en fonction de a, b, c, d, e, f, g, h.

Solution 8 *La matrice K a 2 colonnes et L a 2 lignes : le produit KL est défini, et c'est une matrice carrée d'ordre 2 (Remarque 18.1 et Définition 18.5 du cours 18 [1]). Ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [1]),*

$$KL = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 *Soient la matrice A et la matrice colonne X définies par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Justifier que le produit AX est défini, puis le calculer.

Solution 9 *La matrice A est de type $(3,3)$ et X de type $(3,1)$: le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de X, donc AX est défini, et c'est une matrice colonne de type $(3,1)$ (Remarque 18.1 et Définition 18.5 du cours 18 [1]). Ligne par colonne,*

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 3 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 \\ 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3 Puissances d'une matrice carrée

Exercice 10 *Calculer P^2 pour la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

Solution 10 *La matrice P est la matrice identité I_2. Par la Définition 18.7 du cours 18, $P^2 = PP = I_2 I_2$, et $I_2 I_2 = I_2$ par le Théorème 18.2 (iv) du cours 18 [1], appliqué à $A = I_2$. Donc*

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Exercice 11 *Calculer Q^3 pour la matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

Solution 11 *Par la Définition 18.7 du cours 18 [1], $Q^2 = QQ$ et $Q^3 = Q^2 Q$. Ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [1]),*

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 *Calculer R^4 pour la matrice $R = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.*

Solution 12 *La matrice R est diagonale, de coefficients diagonaux 3 et 5. Par le Théorème 18.4 du cours 18 [1], avec $k = 4$,*

$$R^4 = \begin{pmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & 5^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 625 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 *Soient x et y deux réels, et la matrice diagonale $S = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Exprimer S^n pour tout entier $n \geq 0$ (avec la convention $0^0 = 1$).*

Solution 13 *La matrice S est diagonale, de coefficients diagonaux x et y. Par le Théorème 18.4 du cours 18 [1], pour tout entier $n \geq 0$,*

$$S^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 \\ 0 & y^n \end{pmatrix},$$

avec la convention $0^0 = 1$ si $x = 0$ ou $y = 0$.

4 Déterminant et matrice inverse

Exercice 14 *La matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.*

Solution 14 *Par la Définition 18.8 (i) du cours 18 [1],*

$$\det(M) = 4 \times 6 - 7 \times 2 = 24 - 14 = 10 \neq 0.$$

Par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], M est inversible, et

$$M^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{7}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $MM^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 24-14 & -28+28 \\ 12-12 & -14+24 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = I_2.$

Exercice 15 *La matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?*

Solution 15 *Par la Définition 18.8 (i) du cours 18 [1],*

$$\det(N) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 4 - 4 = 0.$$

Le déterminant de N est nul : par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], N n'est pas inversible.

Exercice 16 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $\det(A)$ *en développant selon la première ligne.*
2. *Vérifier le résultat en développant selon la deuxième colonne.*
3. *La matrice* A *est-elle inversible ?*

Solution 16

1. *Par la Définition 18.8 (ii) du cours 18 [1],*

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (0 \times 1 - 2 \times 0) + (1 \times 1 - 2 \times 4) + 3 \times (1 \times 0 - 0 \times 4) \\ &= 0 - 7 + 0 = -7. \end{aligned}$$

2. *La deuxième colonne de* A *a pour coefficients* $a_{12} = -1$ *et* $a_{22} = a_{32} = 0$*. En développant selon cette colonne (Remarque 18.3 du cours 18 [1]), seul le terme de* a_{12} *reste ; il est affecté du signe* $(-1)^{1+2} = -1$*, et son déterminant d'ordre* 2 *est celui de la matrice obtenue en supprimant la ligne* 1 *et la colonne* 2 *de* A *:*

$$\det(A) = -a_{12}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \times (1 - 8) = -7.$$

   On obtient la même valeur.

3. *Comme* $\det(A) = -7 \neq 0$*, la matrice* A *est inversible (Théorème 18.8 du cours 18 [1]).*

Exercice 17 *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le produit* AB*.*
2. *En déduire que* A *est inversible, et calculer* A^{-1}*.*

Solution 17

1. *Les matrices* A *et* B *sont carrées d'ordre* 3*, donc* AB *est défini (Remarque 18.1 du cours 18 [1]). Ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [1]),*

$$AB = \begin{pmatrix} 2-1+1 & 0+1-1 & -2+1+1 \\ 2-2+0 & 0+2+0 & -2+2+0 \\ 0-1+1 & 0+1-1 & 0+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

2. *On a* $AB = kI_3$ *avec* $k = 2 \neq 0$ *et* $n = 3$. *Par le Corollaire 18.1 du cours 18 [1], A est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5 Systèmes linéaires

Exercice 18 *Résoudre le système suivant, d'inconnues réelles* x *et* y, *à l'aide d'une matrice inverse :*

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

Indication : écrire le système sous la forme $AX = B$, *où* A *est une matrice carrée d'ordre* 2.

Solution 18 *Le système s'écrit* $AX = B$ *(Définition 18.10 du cours 18 [1]), avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A *est* $\det(A) = 1 \times (-1) - 2 \times 3 = -7 \neq 0$. *Par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], A est inversible, et l'inverse de A est donné par*

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par le Théorème 18.10 du cours 18 [1], le système a une solution et une seule :

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 4 \\ 3 \times 5 + (-1) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ \frac{11}{7} \end{pmatrix},$$

soit $(x, y) = \left(\frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$. *Vérification :* $\frac{13}{7} + 2 \times \frac{11}{7} = \frac{35}{7} = 5$ *et* $3 \times \frac{13}{7} - \frac{11}{7} = \frac{28}{7} = 4$.

Exercice 19 *Le système suivant, d'inconnues réelles* x *et* y, *a-t-il une seule solution, une infinité de solutions, ou aucune solution ?*

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 3. \end{cases}$$

Solution 19 *La matrice du système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \textit{et} \qquad \det(A) = 1 \times (-2) - (-1) \times 2 = 0.$$

Par le Théorème 18.11 (ii) du cours 18 [1], le système n'a aucune solution, ou il en a une infinité ; il reste à trancher.

Supposons qu'un couple (x, y) soit solution. La première équation donne $x - y = 1$; la deuxième, multipliée par $\frac{1}{2}$, donne $x - y = \frac{3}{2}$. On aurait donc $1 = \frac{3}{2}$, ce qui est faux. Le système n'a aucune solution.

Les couples de coefficients $(1, -1)$ et $(2, -2)$ ne sont pas nuls. Par la Remarque 18.5 du cours 18 [1], les deux équations sont donc celles de deux droites ; elles n'ont aucun point commun, donc elles sont strictement parallèles.

Exercice 20 *On considère le système suivant, d'inconnues réelles x et y :*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6. \end{cases}$$

1. *Calculer le déterminant de la matrice du système. Que peut-on en déduire sur le nombre de solutions ?*

2. *Résoudre le système.*

Solution 20

1. *La matrice du système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 2 = 0.$$

Par le Théorème 18.11 (ii) du cours 18 [1], le système n'a aucune solution, ou il en a une infinité.

2. *On note L_1 et L_2 les deux équations. L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne un système équivalent (Théorème 18.12 (iii) du cours 18 [1]) :*

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

L'équation $0 = 0$ est vérifiée par tout couple : le système équivaut donc à la seule équation $x + 2y = 3$, c'est-à-dire à $x = 3 - 2y$. L'ensemble des solutions est

$$\{(3 - 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Vérification : $(3 - 2t) + 2t = 3$ et $2(3 - 2t) + 4t = 6$. Deux valeurs distinctes de t donnent deux solutions distinctes : le système a une infinité de solutions. Les couples de coefficients $(1, 2)$ et $(2, 4)$ ne sont pas nuls : les deux équations sont celles de deux droites, parallèles puisque le déterminant est nul (Remarque 18.5 du cours 18 [1]) ; elles ont en commun le point $(3, 0)$ (cas $t = 0$) : elles sont confondues.

Exercice 21 *Résoudre par la méthode de Gauss le système (S) suivant, d'inconnues réelles x, y et z :*

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ -x + y + 2z = 3. \end{cases}$$

Solution 21 *On note L_1, L_2, L_3 les équations ; chaque flèche résume des opérations du Théorème 18.12 du cours 18 [1], qui donnent des systèmes équivalents. On élimine d'abord x des équations L_2 et L_3 :*

$$(S) \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - 3z = -8 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases}$$

puis y de l'équation L_3 :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - 3z = -8 \\ 3y + 3z = 6 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\iff} \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -y - 3z = -8 \\ -6z = -18. \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire ; on le résout en remontant (Remarque 18.6 du cours 18 [1]). La dernière équation donne $z = 3$; la deuxième, $-y = -8 + 9 = 1$, soit $y = -1$; la première, $x = 3 - 2 \times (-1) - 3 = 2$. Le système (S) a une seule solution : $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

Vérification : $2 - 2 + 3 = 3$, $4 - 3 - 3 = -2$ et $-2 - 1 + 6 = 3$.

6 Matrices diagonalisables et suites

Exercice 22 *Soit la matrice $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que U est diagonalisable, en donnant une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $U = PDP^{-1}$.*

Solution 22 *On prend $P = I_2$ et $D = U$, qui est diagonale. La matrice I_2 est inversible et $I_2^{-1} = I_2$, car $I_2 I_2 = I_2$ (Théorème 18.2 (iv) et Définition 18.9 du cours 18 [1]). Par le Théorème 18.2 (iv) du cours 18 [1],*

$$PDP^{-1} = I_2 U I_2 = U.$$

Donc U est diagonalisable (Définition 18.11 du cours 18 [1]). Une matrice diagonale est toujours diagonalisable, par le même argument.

Exercice 23 *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que P est inversible, et calculer P^{-1}.*
2. *Vérifier que $A = PDP^{-1}$.*
3. *En déduire que, pour tout entier $k \geq 0$,*

$$A^k = \begin{pmatrix} -2(-1)^k + 3 \times 2^k & 3(-1)^k - 3 \times 2^k \\ -2(-1)^k + 2 \times 2^k & 3(-1)^k - 2 \times 2^k \end{pmatrix}.$$

Solution 23

1. *On a* $\det(P) = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$. *Par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], P est inversible, et*

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $PP^{-1} = \begin{pmatrix} -2+3 & 3-3 \\ -2+2 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2$.

2. *Le produit est associatif (Théorème 18.2 (i) du cours 18 [1]) ; on calcule* PD, *puis* $(PD)P^{-1}$ *:*

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & -3-6 \\ 2+4 & -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = A.$$

3. *Comme* $A = PDP^{-1}$ *avec P inversible, le Théorème 18.13 du cours 18 [1] donne* $A^k = PD^kP^{-1}$ *pour tout entier* $k \geq 0$. *La matrice D est diagonale ; par le Théorème 18.4 du cours 18 [1],*

$$D^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix},$$

puis

$$PD^k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 3 \times 2^k \\ (-1)^k & 2 \times 2^k \end{pmatrix},$$

et

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} -2(-1)^k + 3 \times 2^k & 3(-1)^k - 3 \times 2^k \\ -2(-1)^k + 2 \times 2^k & 3(-1)^k - 2 \times 2^k \end{pmatrix}.$$

Contrôle : pour $k = 0$, *on obtient* I_2, *et pour* $k = 1$, *on obtient A.*

Exercice 24 *Soient les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que P est inversible, et calculer* P^{-1}.
2. *Vérifier que* $A = PDP^{-1}$.
3. *Calculer* A^k *pour tout entier* $k \geq 0$.

4. *Soient* $(x_k)_{k\geq 0}$ *et* $(y_k)_{k\geq 0}$ *les suites définies par* $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ *et, pour tout entier* $k \geq 0$,

$$x_{k+1} = 4x_k - 2y_k, \qquad y_{k+1} = x_k + y_k.$$

On pose $U_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. *Exprimer* U_{k+1} *en fonction de* A *et de* U_k, *puis* x_k *et* y_k *en fonction de* k.

Solution 24

1. *On a* $\det(P) = 1 \times 1 - 2 \times 1 = -1 \neq 0$. *Par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], P est inversible, et*

$$P^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Contrôle : $PP^{-1} = \begin{pmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = I_2$.

2. *Par l'associativité du produit (Théorème 18.2 (i) du cours 18 [1]), on calcule PD, puis* $(PD)\,P^{-1}$ *:*

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 & 4-6 \\ -2+3 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

3. *Comme* $A = PDP^{-1}$ *avec P inversible, le Théorème 18.13 du cours 18 [1] donne* $A^k = PD^kP^{-1}$ *pour tout entier* $k \geq 0$. *Par le Théorème 18.4 du cours 18 [1],*

$$D^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix},$$

puis

$$PD^k = \begin{pmatrix} 2^k & 2 \times 3^k \\ 2^k & 3^k \end{pmatrix},$$

et

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{pmatrix} -2^k + 2 \times 3^k & 2 \times 2^k - 2 \times 3^k \\ -2^k + 3^k & 2 \times 2^k - 3^k \end{pmatrix}.$$

Contrôle : pour $k = 0$, *on obtient* I_2, *et pour* $k = 1$, *on obtient* A.

4. *Pour tout entier* $k \geq 0$, *par la Définition 18.5 du cours 18 [1],*

$$AU_k = \begin{pmatrix} 4x_k - 2y_k \\ x_k + y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = U_{k+1}.$$

Par le Théorème 18.14 du cours 18 [1], pour tout entier $k \geq 0$,

$$U_k = A^k U_0, \qquad \text{avec} \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Avec la question 3, on en tire

$$x_k = 3\left(-2^k + 2 \times 3^k\right) + 2\left(2 \times 2^k - 2 \times 3^k\right) = 2^k + 2 \times 3^k,$$
$$y_k = 3\left(-2^k + 3^k\right) + 2\left(2 \times 2^k - 3^k\right) = 2^k + 3^k.$$

Contrôle : $x_0 = 1 + 2 = 3$, $y_0 = 1 + 1 = 2$; $x_1 = 4 \times 3 - 2 \times 2 = 8 = 2 + 6$ et $y_1 = 3 + 2 = 5 = 2 + 3$.

Exercice 25 *Dans un repère du plan, on considère l'application f qui, à tout point $M(x, y)$, associe le point $M'(2x + y, x - y)$.*

1. *Donner la matrice de f.*
2. *Montrer que f est une bijection, et donner l'image d'un point $M'(x', y')$ par sa réciproque.*

Solution 25

1. *Soit A la matrice carrée d'ordre 2 ci-dessous. Pour tout point $M(x, y)$, ligne par colonne (Définition 18.5 du cours 18 [1]),*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y \end{pmatrix},$$

qui est la matrice colonne des coordonnées de M'. Donc f est l'application linéaire de matrice A dans ce repère (Remarque 18.8 du cours 18 [1]). Cette matrice est la seule possible : si B convient aussi, les images des points $(1, 0)$ et $(0, 1)$ montrent que B et A ont les mêmes colonnes, donc $B = A$.

2. *On a $\det(A) = 2 \times (-1) - 1 \times 1 = -3 \neq 0$. Par le Théorème 18.7 du cours 18 [1], A est inversible, et*

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Par la Remarque 18.8 du cours 18 [1], f est une bijection, et sa réciproque est l'application linéaire de matrice A^{-1} : elle associe au point $M'(x', y')$ le point

$$M\left(\frac{x' + y'}{3}, \frac{x' - 2y'}{3}\right).$$

Vérification : si $x' = 2x + y$ et $y' = x - y$, alors $x' + y' = 3x$ et $x' - 2y' = 3y$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 18. Les matrices, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.