Exercices type Bac & Solutions : Logique et Ensembles

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 19.3 du cours 19* désigne un énoncé numéroté du cours 19 [2], sur la logique et les ensembles ; un renvoi comme *Théorème 17.9 du cours 17* désigne un énoncé numéroté du cours 17 [1], sur le dénombrement. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Les valeurs de vérité sont notées V (vrai) et F (faux), et les connecteurs "non", "et", "ou" sont écrits en toutes lettres (Définitions 19.1 et 19.2 du cours 19 [2]). Si A est une partie d'un ensemble E, on note $\bar{A} = E \setminus A$ son complémentaire dans E (Définition 19.7 du cours 19 [2]).

Table des matières

1 Assertions et connecteurs **1**

2 Quantificateurs **4**

3 Raisonnements **6**

4 Ensembles **6**

5 Opérations sur les ensembles **8**

6 Produit cartésien **9**

7 Applications **10**

8 Ensembles finis et infinis **11**

1 Assertions et connecteurs

Exercice 1 *Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $P(x)$ le prédicat "$x > 3$". Déterminer la valeur de vérité des assertions $P(2)$ et $P(4)$.*

Solution 1 *Le prédicat $P(x)$ devient une assertion dès que l'on donne une valeur à x (Définition 19.1 du cours 19 [2]). L'assertion $P(2)$ est "$2 > 3$" : elle est fausse, de valeur F. L'assertion $P(4)$ est "$4 > 3$" : elle est vraie, de valeur V.*

Exercice 2 *On considère les assertions A : "Il pleut à Tunis aujourd'hui à midi" et B : "Je prends mon parapluie aujourd'hui à midi". Écrire avec les symboles logiques l'assertion "Je prends mon parapluie aujourd'hui à midi si et seulement s'il pleut à Tunis aujourd'hui à midi".*

Solution 2 *Le lieu et le moment étant fixés, chacun des énoncés A et B est soit vrai, soit faux : ce sont des assertions (Définition 19.1 du cours 19 [2]). Sans eux, "Il pleut" serait vrai en un lieu et faux en un autre, et ne serait pas une assertion.*

L'assertion "P si et seulement si Q" s'écrit $P \Leftrightarrow Q$ (Remarque 19.2 du cours 19 [2]). Ici, P est B et Q est A : l'assertion demandée est

$$B \Leftrightarrow A.$$

Par la Définition 19.2 du cours 19 [2], $B \Leftrightarrow A$ est vraie si et seulement si A et B ont la même valeur de vérité, ce qui ne dépend pas de l'ordre de A et B. Elle a donc la même valeur de vérité que $A \Leftrightarrow B$, et l'on peut aussi écrire $A \Leftrightarrow B$.

Exercice 3 *On considère les assertions A : "2 est un nombre pair" et B : "5 est un nombre premier". Déterminer la valeur de vérité de l'assertion "2 est un nombre pair ou 5 est un nombre premier".*

Solution 3 *L'assertion étudiée est "A ou B". Comme $2 = 2 \times 1$, le nombre 2 est pair : A est vraie. Par la Définition 19.2 du cours 19 [2], "A ou B" est vraie dès qu'au moins l'une des deux assertions est vraie (le "ou" est inclusif). Il suffit donc que A soit vraie : "A ou B" est vraie.*

L'assertion B est vraie elle aussi, car les seuls diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 ; mais ce n'est pas nécessaire pour conclure.

Exercice 4 *Soient A, B, C des assertions, et H l'assertion "$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow C)$".*

1. *Dresser la table de vérité de H, de $A \Rightarrow C$ et de $H \Rightarrow (A \Rightarrow C)$. En déduire que l'assertion $H \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de A, B, C.*

2. *Dresser la table de vérité de $A \Rightarrow B$ et de sa réciproque $B \Rightarrow A$. Ces deux assertions ont-elles toujours la même valeur de vérité ?*

Solution 4

1. *Les valeurs de $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $A \Rightarrow C$ se lisent dans la table de la Définition 19.2 du cours 19 [2], où une implication n'est fausse que si son*

hypothèse est vraie et sa conclusion fausse. L'assertion H est vraie si et seulement si $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$ sont toutes deux vraies. On obtient, pour les $2^3 = 8$ choix des valeurs de A, B, C,

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	H	$A \Rightarrow C$	$H \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Dans chaque ligne où H est vraie (lignes 1, 5, 7 et 8), $A \Rightarrow C$ est vraie ; dans les autres lignes, H est fausse, et une implication d'hypothèse fausse est vraie (Remarque 19.2 du cours 19 [2]). La dernière colonne ne contient que des V : l'assertion $H \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de A, B, C.

2. *Par la Définition 19.2 du cours 19 [2],*

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Les deux colonnes diffèrent aux lignes 2 et 3 : une implication et sa réciproque n'ont pas toujours la même valeur de vérité. L'Exemple 19.2 du cours 19 [2] en donne un cas : pour $x = -2$, l'implication "$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$" est vraie et sa réciproque est fausse.

Exercice 5 *Soit x un réel. On considère l'implication I : "$x > 1 \Rightarrow x^2 > x$".*

1. *Écrire la négation de I.*
2. *Écrire la contraposée de I.*
3. *Montrer que I est vraie pour tout réel x. En déduire la valeur de vérité de la contraposée et celle de la négation de I.*
4. *Écrire la réciproque de I. Est-elle vraie pour tout réel x ?*

Solution 5 *Pour un réel x, la négation de "$x > 1$" est "$x \leq 1$", et celle de "$x^2 > x$" est "$x^2 \leq x$".*

1. *Par le Théorème 19.1 (vi) du cours 19 [2], la négation de I est "$x > 1$ et $x^2 \leq x$".*

2. *Par le Théorème 19.1 (vii) du cours 19 [2], la contraposée de I est "$x^2 \leq x \Rightarrow x \leq 1$".*

3. *Soit x un réel tel que $x > 1$ (Remarque 19.4 du cours 19 [2]). Alors $x > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $x^2 - x = x(x-1)$ est le produit de deux réels strictement positifs : $x^2 - x > 0$, c'est-à-dire $x^2 > x$. Ainsi, I est vraie pour tout réel x.*

   Pour chaque réel x, la contraposée a la même valeur de vérité que I (Théorème 19.1 (vii) du cours 19 [2]) : elle est vraie. La négation de I est fausse, puisque I est vraie (Définition 19.2 du cours 19 [2]) : aucun réel x ne vérifie à la fois $x > 1$ et $x^2 \leq x$.

4. *La réciproque de I est "$x^2 > x \Rightarrow x > 1$" (Remarque 19.2 du cours 19 [2]). Elle est fausse pour $x = -1$: on a $(-1)^2 = 1 > -1$, mais $-1 \leq 1$. Elle n'est donc pas vraie pour tout réel x : $x = -1$ est un contre-exemple (Théorème 19.3 (vi) du cours 19 [2]).*

2 Quantificateurs

Exercice 6 *On considère l'énoncé "Pour tout entier relatif n, si n est impair, alors n^2 est impair". Est-ce une assertion ou un prédicat ? Justifier la réponse, et comparer avec l'énoncé "n est impair".*

Solution 6 *Dans cet énoncé, la variable n est liée par le quantificateur "pour tout" : elle n'est pas libre (Remarque 19.3 du cours 19 [2]). Un énoncé sans variable libre est une assertion : c'est donc une assertion, et non un prédicat. On ne peut pas donner de valeur à n dans cet énoncé : il porte sur tous les entiers à la fois.*

Cette assertion est vraie (Exemple 19.6 du cours 19 [2]). Soit $n \in \mathbb{Z}$, impair : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$, et $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, avec $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$: n^2 est impair.

En revanche, dans l'énoncé "n est impair", où n est un entier relatif qui n'a pas reçu de valeur, la variable n est libre : c'est un prédicat $P(n)$ (Définition 19.1 et Remarque 19.3 du cours 19 [2]). Il devient une assertion quand on donne une valeur à n : $P(3)$ est vraie et $P(4)$ est fausse.

Exercice 7 *Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $P(x)$ le prédicat "$x^2 \geq 0$". Écrire avec un quantificateur l'assertion "Le carré de tout entier relatif est positif ou nul", et déterminer sa valeur de vérité.*

Solution 7 *L'assertion affirme que $P(x)$ est vraie pour chaque élément x de $\mathbb{Z}$. Elle s'écrit (Définition 19.3 du cours 19 [2])*

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 \geq 0.$$

Elle est vraie. Soit $x \in \mathbb{Z}$ (Remarque 19.4 du cours 19 [2]) ; on a $x \geq 0$ ou $x < 0$.

- *Si $x \geq 0$, alors $x^2 = x \times x \geq 0$, comme produit de deux réels positifs ou nuls.*
- *Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et $x^2 = (-x) \times (-x) > 0$.*

Dans les deux cas, $x^2 \geq 0$ (Théorème 19.3 (iv) du cours 19 [2]).

Exercice 8 *Soit C l'ensemble des élèves d'une classe. Pour $x \in C$, on note $Q(x)$ le prédicat "x a obtenu une note strictement supérieure à 10 au dernier examen".*

1. *Écrire avec un quantificateur l'assertion "Tous les élèves de la classe ont obtenu une note strictement supérieure à 10 au dernier examen".*
2. *Écrire sa négation avec un quantificateur, puis la traduire par une phrase.*

Solution 8

1. *L'assertion affirme que $Q(x)$ est vraie pour chaque élément x de C (Définition 19.3 du cours 19 [2]) :*

$$\forall x \in C,\ Q(x).$$

2. *Par le Théorème 19.2 (i) du cours 19 [2], sa négation est*

$$\exists x \in C,\ \text{non } Q(x).$$

La négation de "la note de x est strictement supérieure à 10" est "la note de x est inférieure ou égale à 10". La négation se lit donc : "au moins un élève de la classe a obtenu une note inférieure ou égale à 10 au dernier examen". Ce n'est pas "aucun élève n'a obtenu une note strictement supérieure à 10" : on échange $\forall$ et $\exists$, et l'on nie le prédicat.

Exercice 9 *On considère les assertions*

$$A_1 : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x \qquad \text{et} \qquad A_2 : \forall x \in [0, +\infty[,\ \exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x.$$

1. *L'assertion A_1 est-elle vraie ?*
2. *Écrire la négation de A_1.*
3. *L'assertion A_2 est-elle vraie ?*
4. *On échange l'ordre des quantificateurs de A_2 : l'assertion A_3 : "$\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, +\infty[,\ y^2 = x$" est-elle vraie ?*

Solution 9

1. *Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $S(x)$ le prédicat "$\exists y \in \mathbb{R},\ y^2 = x$". L'assertion $S(-1)$ est fausse : pour tout réel y, on a $y^2 \geq 0 > -1$, donc $y^2 \neq -1$. Ainsi, $x = -1$ est un contre-exemple, et A_1 : "$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x)$" est fausse (Théorème 19.3 (vi) du cours 19 [2]).*

2. *La négation de* A_1 *est "*$\exists x \in \mathbb{R},\ \text{non}\, S(x)$*" (Théorème 19.2 (i) du cours 19 [2]). Par le Théorème 19.2 (ii) du cours 19 [2], "non* $S(x)$*" s'écrit "*$\forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x$*". La négation de* A_1 *est donc*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 \neq x.$$

Elle est vraie, avec $x = -1$ *(question 1).*

3. *L'assertion* A_2 *est vraie. Soit* $x \in [0, +\infty[$ *(Remarque 19.4 du cours 19 [2]). Le réel* $y = \sqrt{x}$ *vérifie* $y^2 = x$ *(Exemple 19.15 (iii) du cours 19 [2]) : il existe donc* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $y^2 = x$*. Le réel* y *dépend de* x*.*

4. *L'assertion* A_3 *est fausse. Supposons qu'il existe un réel* y *tel que* $y^2 = x$ *pour tout* $x \in [0, +\infty[$*. Avec* $x = 0$ *puis* $x = 1$*, on obtient* $y^2 = 0$ *et* $y^2 = 1$*, donc* $0 = 1$ *: c'est une contradiction, et* A_3 *est fausse (Théorème 19.3 (iii) du cours 19, appliqué à l'assertion non* A_3*, avec le Théorème 19.1 (ii) du cours 19 [2]). Comme dans l'Exemple 19.4 du cours 19 [2], échanger* $\forall$ *et* $\exists$ *change le sens : dans* A_3*, le même* y *devrait convenir pour tous les* x*.*

3 Raisonnements

Exercice 10 *Montrer, par l'absurde, qu'il n'existe pas d'entiers relatifs* a *et* b *tels que* $6a + 9b = 1$*.*

Indication : on pourra remarquer que $6a + 9b$ *est un multiple de* 3*.*

Solution 10 *Notons* A *l'assertion "il n'existe pas d'entiers relatifs* a *et* b *tels que* $6a + 9b = 1$*". Sa négation est "il existe des entiers relatifs* a *et* b *tels que* $6a+9b = 1$*" (Théorème 19.1 (ii) du cours 19 [2]). On montre que cette négation conduit à une assertion fausse (Théorème 19.3 (iii) du cours 19 [2]).*

Étape 1 : on suppose le contraire. *Supposons qu'il existe* $a, b \in \mathbb{Z}$ *tels que* $6a + 9b = 1$*. Alors* $1 = 3(2a + 3b)$*, avec* $m = 2a + 3b \in \mathbb{Z}$ *:* 1 *serait un multiple de* 3*.*

Étape 2 :* 1 *n'est pas un multiple de* 3*. *Soit* $j \in \mathbb{Z}$ *; on a* $j \leq 0$ *ou* $j \geq 1$*, puisqu'il n'y a pas d'entier strictement compris entre* 0 *et* 1*. Si* $j \leq 0$*, alors* $3j \leq 0 < 1$ *; si* $j \geq 1$*, alors* $3j \geq 3 > 1$*. Dans les deux cas,* $3j \neq 1$ *(Théorème 19.3 (iv) du cours 19 [2]). L'assertion "*1 *est un multiple de* 3*" est donc fausse.*

Étape 3 : conclusion. *La négation de* A *entraîne une assertion fausse : elle est fausse, et* A *est vraie (Théorème 19.3 (iii) du cours 19 [2]). Il n'existe pas d'entiers relatifs* a *et* b *tels que* $6a + 9b = 1$*.*

4 Ensembles

Exercice 11 *Soit l'ensemble* $E = \{2, 4, 6, 8\}$*.*

1. *Le nombre* 5 *appartient-il à* E *? Le nombre* 6 *appartient-il à* E *?*

2. *Les écritures* $\{6\} \subset E$ *et* $\{6\} \in E$ *sont-elles correctes ?*

Solution 11 *L'ensemble* E *est décrit en extension : ses éléments sont exactement* 2, 4, 6 *et* 8 *(Définition 19.4 du cours 19 [2]).*

1. *Le nombre* 5 *n'est aucun de ces quatre nombres :* $5 \notin E$*. Le nombre* 6 *en est un :* $6 \in E$*.*

2. *Le seul élément du singleton* $\{6\}$ *est* 6*, qui appartient à* E *:* $\{6\} \subset E$ *est correct (Définition 19.5 du cours 19 [2]). En revanche, les éléments de* E *sont des nombres, et la partie* $\{6\}$ *n'en est pas un :* $\{6\} \notin E$*, et l'écriture* $\{6\} \in E$ *est incorrecte. Il ne faut pas confondre l'élément* 6 *et la partie* $\{6\}$ *(Exemple 19.11 du cours 19 [2]).*

Exercice 12 *On considère les ensembles*

$$A_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\right\}, \quad A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\right\},$$

$$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} : 1 < n < 2\}, \ \ A_4 = \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 4\right\}, \ \ A_5 = \left\{n \in \mathbb{Z} : n^2 = 4\right\}.$$

1. *Écrire chacun de ces ensembles en extension. Lesquels sont vides ? Lesquels sont des singletons ?*

2. *Que peut-on dire des ensembles* A_1 *et* A_3 *?*

Solution 12 *Ces ensembles sont décrits en compréhension (Définition 19.4 du cours 19 [2]).*

1. *On cherche, pour chacun, les éléments qui vérifient la propriété.*

   - *Pour tout réel* x*,* $x^2 \geq 0 > -1$ *: aucun réel ne vérifie* $x^2 = -1$*, et* A_1 *est vide.*
   - *Pour un réel* x*,* $x^2 = 0$ *si et seulement si* $x = 0$ *:* $A_2 = \{0\}$ *est un singleton.*
   - *Si* $n \in \mathbb{Z}$ *et* $n > 1$*, alors* $n \geq 2$ *: aucun entier ne vérifie* $1 < n < 2$*, et* A_3 *est vide.*
   - *Pour un réel* n*,* $n^2 = 4$ *si et seulement si* $(n-2)(n+2) = 0$*, c'est-à-dire* $n = 2$ *ou* $n = -2$*. Comme* $2 \in \mathbb{N}$ *et* $-2 \notin \mathbb{N}$*,* $A_4 = \{2\}$ *est un singleton.*
   - *De même,* $A_5 = \{-2, 2\}$ *: il a deux éléments, il n'est ni vide ni un singleton.*

2. *Les ensembles* A_1 *et* A_3 *sont vides. Il n'existe qu'un seul ensemble vide (Théorème 19.4 (iii) du cours 19 [2]) :* $A_1 = A_3 = \emptyset$*, bien que leurs descriptions soient différentes.*

5 Opérations sur les ensembles

Exercice 13 *Soient les ensembles* $A = \{1, 2, 3\}$ *et* $B = \{3, 4, 5\}$. *Déterminer* $A \cup B$, $A \cap B$ *et* $A \setminus B$.

Solution 13 *Les ensembles* A *et* B *sont des parties de* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *On obtient, par la Définition 19.7 du cours 19 [2], les trois ensembles suivants.*

- $A \cup B$ *est formé des éléments de* E *qui sont dans* A *ou dans* B : $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- $A \cap B$ *est formé des éléments de* E *qui sont à la fois dans* A *et dans* B : $A \cap B = \{3\}$;
- $A \setminus B$ *est formé des éléments de* E *qui sont dans* A *et non dans* B : $A \setminus B = \{1, 2\}$.

Exercice 14 *Soient* a, b, c, d, e, f *six objets deux à deux distincts,* $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, *et ses parties* $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $F = \{c, d, e, f\}$. *Vérifier que* $G = E \cup F$, *puis déterminer le complémentaire de* F *dans* G *et la différence* $E \setminus F$.

Solution 14 *Par la Définition 19.7 du cours 19 [2],* $E \cup F$ *est formé des éléments de* G *qui sont dans* E *ou dans* F : *c'est* $\{a, b, c, d, e, f\} = G$. *Par la Définition 19.7 du cours 19 [2], le complémentaire de* F *dans* G *est l'ensemble des éléments de* G *qui ne sont pas dans* F :

$$G \setminus F = \{a, b\}.$$

La différence $E \setminus F$ *est l'ensemble des éléments de* E *qui ne sont pas dans* F *(Définition 19.7 du cours 19 [2]) :*

$$E \setminus F = \{a, b\}.$$

Les deux ensembles sont égaux. Ce n'est pas un hasard. Soit $x \in G$. *L'assertion* $x \in G \setminus F$ *s'écrit "*$x \in G$ *et* $x \notin F$*", c'est-à-dire, puisque* $G = E \cup F$, *"*$x \notin F$ *et* $(x \in E$ *ou* $x \in F)$*", car l'ordre des deux termes d'un "et" ne compte pas (Définitions 19.7 et 19.2 du cours 19 [2]). Par le Théorème 19.1 (iv) du cours 19, cette assertion équivaut à "*$(x \notin F$ *et* $x \in E)$ *ou* $(x \notin F$ *et* $x \in F)$*", dont le second terme est faux (Théorème 19.1 (i) du cours 19 [2]). Un "ou" dont un terme est faux a la valeur de l'autre terme (Définition 19.2 du cours 19 [2]). Ainsi,* $x \in G \setminus F$ *équivaut à "*$x \in E$ *et* $x \notin F$*", c'est-à-dire à* $x \in E \setminus F$, *et* $(E \cup F) \setminus F = E \setminus F$ *(Définition 19.5 du cours 19 [2]).*

Exercice 15 *Soient* E *un ensemble, et* A, B, C *des parties de* E.

1. *Montrer que* $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. *Vérifier cette égalité lorsque* $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 6\}$ *et* $C = \{2, 3, 7\}$.

Solution 15

1. *Les deux membres sont des parties de E ; soit $x \in E$. Par la Définition 19.7 du cours 19 [2], $x \in A \setminus (B \cup C)$ équivaut à*

$$x \in A \text{ et non}(x \in B \text{ ou } x \in C)\,.$$

Par la loi de De Morgan (Théorème 19.1 (iii) du cours 19 [2]), cela équivaut à

$$x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ et } x \notin C)\,.$$

Par la Définition 19.2 du cours 19, cette assertion est vraie si et seulement si les trois assertions $x \in A$, $x \notin B$, $x \notin C$ sont vraies, c'est-à-dire si et seulement si

$$(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } (x \in A \text{ et } x \notin C)$$

est vraie, ce qui s'écrit $x \in A \setminus B$ et $x \in A \setminus C$, soit $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (Définition 19.7 du cours 19 [2]). Les deux ensembles ont les mêmes éléments : ils sont égaux (Définition 19.5 du cours 19 [2]).

2. *On a $B \cup C = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, donc $A \setminus (B \cup C) = \{4, 5\}$. D'autre part, $A \setminus B = \{3, 4, 5\}$ et $A \setminus C = \{1, 4, 5\}$, donc $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{4, 5\}$. Les deux membres sont bien égaux à $\{4, 5\}$.*

6 Produit cartésien

Exercice 16 *Soient les ensembles*

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 3\} \qquad \text{et} \qquad B = \{y \in \mathbb{Z} : 2 \leq y < 5\}\,.$$

1. *Écrire A et B en extension.*
2. *Écrire $A \times B$ en extension, et calculer* $\mathrm{Card}\,(A \times B)$.
3. *Le couple $(3, 2)$ appartient-il à $A \times B$? Et le couple $(2, 3)$?*

Solution 16

1. *Les entiers x tels que $0 \leq x < 3$ sont 0, 1, 2, et les entiers y tels que $2 \leq y < 5$ sont 2, 3, 4 (Définition 19.4 du cours 19 [2]) :*

$$A = \{0, 1, 2\}\,, \qquad B = \{2, 3, 4\}\,.$$

2. *Par la Définition 19.8 du cours 19 [2], $A \times B$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in A$ et $y \in B$:*

$$A \times B = \{(0, 2)\,, (0, 3)\,, (0, 4)\,, (1, 2)\,, (1, 3)\,, (1, 4)\,, (2, 2)\,, (2, 3)\,, (2, 4)\}\,.$$

Les ensembles A et B sont finis, de cardinal 3 (Définition 17.1 du cours 17 [1]). Par le Théorème 17.2 du cours 17 [1],

$$\mathrm{Card}\,(A \times B) = \mathrm{Card}\,(A) \times \mathrm{Card}\,(B) = 3 \times 3 = 9,$$

ce qui correspond aux neuf couples écrits ci-dessus.

3. *On a $3 \notin A$: le couple $(3,2)$ n'appartient pas à $A \times B$. En revanche, $2 \in A$ et $3 \in B$, donc $(2,3) \in A \times B$. L'ordre des composantes compte : $(2,3) \neq (3,2)$ (Définition 19.8 du cours 19 [2]).*

7 Applications

Exercice 17 *Soit l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

1. *Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x)$ est bien un élément de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.*
2. *Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Résoudre l'équation $f(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. En déduire que f est une bijection, et déterminer sa réciproque f^{-1}.*
3. *Calculer $f(3)$, puis $f^{-1}(f(3))$.*
4. *L'application $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ définie par la même formule, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, est-elle une bijection ?*

Solution 17

1. *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Comme $x - 2 \neq 0$, le réel $f(x)$ est défini. Si l'on avait $f(x) = 1$, on aurait $x + 1 = x - 2$, soit $1 = -2$, ce qui est faux. Donc $f(x) \neq 1$, et $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: f est bien une application de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (Définition 19.9 du cours 19 [2]).*
2. *Soient $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Comme $x - 2 \neq 0$, puis $y - 1 \neq 0$,*

$$f(x) = y \Leftrightarrow x + 1 = y(x-2) \Leftrightarrow (y-1)x = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Il reste à vérifier que ce réel est dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Si l'on avait $\dfrac{2y+1}{y-1} = 2$, on aurait $2y + 1 = 2y - 2$, soit $1 = -2$, ce qui est faux. Donc y a exactement un antécédent par f, à savoir $\dfrac{2y+1}{y-1}$.

Ceci vaut pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (Définition 19.10 du cours 19 [2]). Sa réciproque associe à chaque y son unique antécédent :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, \qquad f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{y-1}.$$

3. *On a $f(3) = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$, puis $f^{-1}(4) = \dfrac{2 \times 4 + 1}{4-1} = \dfrac{9}{3} = 3$. Ainsi $f^{-1}(f(3)) = 3$, comme l'annonce le Théorème 19.6 (ii) du cours 19 [2].*

4. *Le réel* 1 *est un élément de l'ensemble d'arrivée* $\mathbb{R}$ *de* g*, et il n'a pas d'antécédent : le calcul de la question 1 montre que* $g(x) = \dfrac{x+1}{x-2} \neq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$*. Donc* g *n'est pas une bijection (Définition 19.10 du cours 19 [2]). Comme dans l'Exemple 19.15 du cours 19 [2],* f *et* g *ont la même formule, mais pas le même ensemble d'arrivée.*

8 Ensembles finis et infinis

Exercice 18 *Soit l'ensemble* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. *Donner trois éléments de l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *des parties de* E.
2. *Calculer* $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

Solution 18

1. *Par la Définition 19.6 du cours 19 [2], l'ensemble* $\mathcal{P}(E)$ *contient toujours* $\emptyset$ *et* E*. Il contient aussi, par exemple, le singleton* $\{1\}$*, car* $\{1\} \subset E$*. Ainsi* $\emptyset$*,* $\{1\}$ *et* E *sont trois éléments de* $\mathcal{P}(E)$.
2. *L'ensemble* E *est fini, à* 5 *éléments :* $\text{Card}(E) = 5$ *(Définition 17.1 du cours 17 [1]). Par le Théorème 17.9 du cours 17 [1], rappelé dans la Remarque 19.9 du cours 19 [2],*

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)} = 2^5 = 32.$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.