Exercices type Bac & Solutions : Isométries du Plan

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les solutions, un renvoi comme *Théorème 20.12 du cours 20* désigne un énoncé numéroté du cours 20 [5], sur les isométries du plan ; un renvoi comme *Théorème 12.7 du cours 12* désigne un énoncé numéroté du cours 12 [1], sur les nombres complexes ; de même pour le cours 14 [2], sur les vecteurs et la géométrie, le cours 15 [3], sur le produit scalaire, et le cours 19 [4], sur la logique et les ensembles. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; un point $M(x, y)$ a pour affixe $z = x + \boldsymbol{i}y$, et son image $M'(x', y')$ a pour affixe $z' = x' + \boldsymbol{i}y'$ (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Une application du plan est donnée par ses coordonnées ou par son écriture complexe. L'angle orienté de deux vecteurs non nuls est noté $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ (Définition 15.2 du cours 15 [3]). Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g (Définition 20.1 du cours 20 [5]).

Table des matières

1 Applications du plan **1**

2 Transformations usuelles **3**

3 Isométries **6**

4 Composée de deux symétries orthogonales **9**

5 Points invariants et classification **11**

1 Applications du plan

Exercice 1 *Soient $f = t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $g = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

1. *Déterminer les écritures complexes de $g \circ f$ et de $f \circ g$.*

2. *Calculer les images de O par $g \circ f$ et par $f \circ g$. Les applications f et g commutent-elles ?*

3. *Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$, dont on donnera les centres.*

Solution 1

1. *Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe 1, et $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$. Par le Théorème 20.4 (i) et (ii) du cours 20 [5], avec $\omega = 0$, f envoie z sur $z+1$ et g envoie z sur $\boldsymbol{i}z$. Par la Définition 20.1 (i) du cours 20 [5], $g \circ f$ applique d'abord f, puis g : elle envoie z sur $\boldsymbol{i}(z+1) = \boldsymbol{i}z + \boldsymbol{i}$. De même, $f \circ g$ envoie z sur $\boldsymbol{i}z + 1$. Ainsi*
$$g \circ f : z \mapsto z' = \boldsymbol{i}z + \boldsymbol{i} \quad et \quad f \circ g : z \mapsto z' = \boldsymbol{i}z + 1.$$

2. *Pour $z = 0$, on obtient $\boldsymbol{i}$ et 1 : $(g \circ f)(O)$ est le point $(0,1)$, et $(f \circ g)(O)$ est le point $(1,0)$. Ces deux points sont distincts, donc $g \circ f \neq f \circ g$ (Définition 19.9 du cours 19 [4]) : f et g ne commutent pas. La Remarque 20.1 du cours 20 [5] annonce cette situation, où l'ordre de la composition compte.*

3. *Cherchons les points invariants de $g \circ f$: $z = \boldsymbol{i}z + \boldsymbol{i}$ équivaut à $(1 - \boldsymbol{i})z = \boldsymbol{i}$, soit*
$$z = \frac{\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{i}(1+\boldsymbol{i})}{(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})} = \frac{-1+\boldsymbol{i}}{2}.$$
Notons $\omega_1 = \frac{-1+\boldsymbol{i}}{2}$; on a $\omega_1 = \boldsymbol{i}\omega_1 + \boldsymbol{i}$, et, en retranchant, $z' - \omega_1 = \boldsymbol{i}z + \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{i}\omega_1 + \boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}(z - \omega_1)$. Comme $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5] montre que $g \circ f$ est la rotation de centre $\Omega_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   De même, $z = \boldsymbol{i}z + 1$ équivaut à $z = \frac{1}{1-\boldsymbol{i}} = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}$; avec $\omega_2 = \frac{1+\boldsymbol{i}}{2}$, on obtient $z' - \omega_2 = \boldsymbol{i}(z - \omega_2)$, et $f \circ g$ est la rotation de centre $\Omega_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]). Les deux composées ont le même angle, mais des centres différents.

Exercice 2 *Soient f une application du plan, g une bijection du plan et $h = g \circ f \circ g^{-1}$.*

1. *Montrer que, pour tout point M, $h(g(M)) = g(f(M))$.*

2. *Montrer qu'un point M est invariant par f si et seulement si le point $g(M)$ est invariant par h.*

3. *On suppose que f et g sont des isométries. Montrer que h est une isométrie.*

4. *Exemple : $f = S_O$ et $g = t_{\overrightarrow{u}}$. Déterminer l'écriture complexe de h, puis ses points invariants.*

Solution 2

1. *Par le Théorème 20.1 (i) du cours 20,* $h \circ g = g \circ f \circ \left(g^{-1} \circ g\right)$, *et* $g^{-1} \circ g = \mathrm{Id}$ *(Théorème 20.1 (iii) du cours 20 [5]). Par le Théorème 20.1 (ii) du cours 20 [5],* $h \circ g = g \circ f$ *: pour tout point* M, $h\left(g\left(M\right)\right) = g\left(f\left(M\right)\right)$.

2. *Soit* M *un point. Si* $f\left(M\right) = M$, *alors, par la question 1,* $h\left(g\left(M\right)\right) = g\left(f\left(M\right)\right) = g\left(M\right)$ *:* $g\left(M\right)$ *est invariant par* h. *Réciproquement, si* $h\left(g\left(M\right)\right) = g\left(M\right)$, *la question 1 donne* $g\left(f\left(M\right)\right) = g\left(M\right)$ *; en appliquant* g^{-1}, *on obtient* $f\left(M\right) = M$ *(Théorème 19.6 (ii) du cours 19 [4]). Les deux implications étant vraies,* M *est invariant par* f *si et seulement si* $g\left(M\right)$ *est invariant par* h.

   Comme tout point N *s'écrit* $g\left(M\right)$, *avec* $M = g^{-1}\left(N\right)$ *(Théorème 19.6 (ii) du cours 19 [4]), les points invariants par* h *sont exactement les images par* g *des points invariants par* f.

3. *Comme* g *est une isométrie,* g^{-1} *en est une (Théorème 20.9 (ii) du cours 20 [5]). Par le Théorème 20.9 (iii) du cours 20 [5],* $f \circ g^{-1}$ *est une isométrie, puis* $g \circ \left(f \circ g^{-1}\right) = h$ *en est une.*

4. *La translation* $g = t_{\overrightarrow{u}}$ *est une bijection, de réciproque* $g^{-1} = t_{-\overrightarrow{u}}$ *(Théorème 20.5 (i) du cours 20 [5]). Par le Théorème 20.4 (iii) et (i) du cours 20 [5],* f *envoie* z *sur* $-z$, g *envoie* z *sur* $z+1$, *et* g^{-1} *envoie* z *sur* $z-1$. *Donc* h *envoie* z *successivement sur* $z-1$, $-\left(z-1\right)$, *puis*

$$z' = -\left(z-1\right)+1 = -z+2.$$

   On a $z'-1 = -\left(z-1\right)$ *:* h *est la symétrie de centre* $\Omega\left(1,0\right)$ *(Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [5]). Comme* $S_O = r\left(O,\pi\right)$, *avec* $\pi \neq 0 \ [2\pi]$, *le seul point invariant par* f *est* O *(Théorèmes 20.4 (iii) et 20.16 (iii) du cours 20 [5]). Par la question 2, le seul point invariant par* h *est* $g\left(O\right) = \Omega$.

2 Transformations usuelles

Exercice 3 *Soit* $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *l'application qui, au point* $M\left(x,y\right)$, *associe le point* $M'\left(y,-x\right)$.

1. *Déterminer l'écriture complexe de* f, *et en déduire que* f *est une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.*

2. *En déduire que* f *est une bijection, et donner* f^{-1} *par ses coordonnées.*

3. *Contrôler le résultat en calculant* $f \circ f^{-1}$ *et* $f^{-1} \circ f$.

Solution 3

1. *Avec $z = x + \boldsymbol{i}y$, l'image a pour affixe*

$$z' = y - \boldsymbol{i}x = -\boldsymbol{i}\,(x + \boldsymbol{i}y) = -\boldsymbol{i}z.$$

Comme $-\boldsymbol{i} = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, l'écriture $z' - 0 = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\,(z - 0)$ montre que f est la rotation $r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$, de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]).

2. *Par le Théorème 20.5 (ii) du cours 20, $f = r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$ est une bijection, de réciproque $f^{-1} = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, d'écriture complexe $z' = \boldsymbol{i}z$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]). Comme $\boldsymbol{i}\,(x + \boldsymbol{i}y) = -y + \boldsymbol{i}x$, f^{-1} associe au point $M\,(x, y)$ le point $M'\,(-y, x)$.*

3. *On a $f \circ f^{-1}\,(x, y) = f\,(-y, x) = (x, -(-y)) = (x, y)$ et $f^{-1} \circ f\,(x, y) = f^{-1}\,(y, -x) = (-(-x), y) = (x, y)$. Ainsi $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, ce qui confirme le résultat de la question 2 (Théorème 20.1 (iv) du cours 20 [5]).*

Exercice 4 *Soit f l'application du plan d'écriture complexe $z' = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}z + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$.*

1. *Montrer que f a un point invariant et un seul, noté Ω, dont on donnera l'affixe ω.*

2. *Montrer que f est une rotation, dont on donnera le centre et l'angle.*

3. *Déterminer l'écriture complexe de f^{-1}.*

Solution 4

1. *Par la Définition 12.5 du cours 12 [1], $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc*

$$1 - e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} \neq 0.$$

Le point d'affixe z est invariant si et seulement si $z = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}z + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}z = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$. Cette équation a une solution et une seule, obtenue en multipliant par $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$ (Théorème 12.13 (i) du cours 12 [1]) :

$$\omega = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\,e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le seul point invariant est $\Omega\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. *Comme $\omega = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\omega + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$, on obtient en retranchant $z' - \omega = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\,(z - \omega)$. Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5], f est la rotation $r\left(\Omega, \frac{\pi}{3}\right)$, de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.*

3. *Par le Théorème 20.5 (ii) du cours 20, $f^{-1} = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{3}\right)$, d'écriture complexe $z' - \omega = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\,(z - \omega)$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]), soit*

$z' = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} z + \omega\left(1 - e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\right)$. *Or* $1 - e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$ *et, par le Théorème 12.13 (i) du cours 12 [1],*

$$\omega e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\, e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\left(-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc f^{-1} *a pour écriture complexe*

$$z' = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} z - \frac{3}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On contrôle ce résultat en résolvant $z' = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} z + \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$ *en* z*, ce qui donne*

$$z = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}\left(z' - \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\right) = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} z' - \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\, e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}},$$

avec

$$\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\, e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{i}\left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 5

1. *Soit* f *l'application du plan d'écriture complexe* $z' = -z + 2 + 4\boldsymbol{i}$*. Montrer que* f *est une symétrie centrale, dont on donnera le centre.*
2. *Soit* Δ *la droite d'équation* $y = x + 1$*. Déterminer l'écriture complexe de* S_Δ*, puis l'expression de* S_Δ *en coordonnées.*
3. *Déterminer l'image par* S_Δ *du point* $A\,(3, 0)$*.*

Solution 5

1. *Cherchons* ω *tel que* $-z + 2 + 4\boldsymbol{i} = -(z - \omega) + \omega = -z + 2\omega$ *pour tout* z *: il suffit que* $2\omega = 2 + 4\boldsymbol{i}$*, soit* $\omega = 1 + 2\boldsymbol{i}$*. Alors* $z' - \omega = -(z - \omega)$*, et* f *est la symétrie* S_Ω *de centre* $\Omega\,(1, 2)$ *(Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [5]).*
2. *La droite* Δ *passe par le point* $K\,(0, 1)$*, d'affixe* $\boldsymbol{i}$*, et a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{w}\,(1, 1)$*, car* K *et le point* $(1, 2)$ *sont sur* Δ *(Théorèmes 14.5 (ii) et 14.10 (ii) du cours 14 [2]). Le vecteur* $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{w}$ *dirige aussi* Δ *(Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]) ; son affixe est* $\frac{1}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{4} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$ *(Définition 12.5 du cours 12 [1]). Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], avec* $\omega = \boldsymbol{i}$ *et* $\alpha = \frac{\pi}{4}$*,* S_Δ *a pour écriture complexe*

$$z' - \boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\,\overline{z - \boldsymbol{i}} = \boldsymbol{i}\,(\bar{z} + \boldsymbol{i}), \quad \textit{soit} \quad z' = \boldsymbol{i}\bar{z} - 1 + \boldsymbol{i},$$

car $\overline{z - \boldsymbol{i}} = \bar{z} + \boldsymbol{i}$ *(Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]). Avec* $\bar{z} = x - \boldsymbol{i}y$*, on a* $\boldsymbol{i}\bar{z} = y + \boldsymbol{i}x$*, d'où* $z' = (y - 1) + \boldsymbol{i}\,(x + 1)$ *:* S_Δ *associe au point* $M\,(x, y)$ *le point* $M'\,(y - 1, x + 1)$*.*
3. *Pour* $A\,(3, 0)$*, on obtient* $A'\,(0 - 1, 3 + 1)$*, soit* $A'\,(-1, 4)$*. Le milieu de* $[AA']$ *est* $(1, 2)$*, qui est sur* Δ*, et* $\overrightarrow{AA'}\,(-4, 4)$ *vérifie* $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{w} = -4 + 4 = 0$ *(Théorèmes 15.2 (i) et 15.4 du cours 15 [3]) :* Δ *est bien la médiatrice de* $[AA']$*, comme l'exige le Théorème 20.2 (ii) du cours 20 [5].*

3 Isométries

Exercice 6 *Soit $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ l'application qui, au point $M(x, y)$, associe le point $M'(x + 1, y - 2)$.*

1. *Montrer que f est une isométrie.*
2. *Reconnaître f.*

Solution 6

1. *Soient $M(x_1, y_1)$ et $N(x_2, y_2)$ deux points, d'images $M'(x_1 + 1, y_1 - 2)$ et $N'(x_2 + 1, y_2 - 2)$. Le repère étant orthonormé, le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [2] donne*

$$\begin{aligned} M'N' &= \sqrt{((x_2 + 1) - (x_1 + 1))^2 + ((y_2 - 2) - (y_1 - 2))^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN. \end{aligned}$$

   Ainsi f conserve les distances : c'est une isométrie (Définition 20.6 du cours 20 [5]).

2. *L'écriture complexe de f est $z' = (x + 1) + \boldsymbol{i}(y - 2) = z + 1 - 2\boldsymbol{i}$. Le vecteur $\overrightarrow{w}(1, -2)$ a pour affixe $1 - 2\boldsymbol{i}$ (Définition 12.4 (ii) du cours 12 [1]) : f est la translation $t_{\overrightarrow{w}}$ de vecteur $\overrightarrow{w}(1, -2)$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]).*

Exercice 7 *Soient les points $A(1, 2)$, $B(3, 5)$ et $C(4, -1)$, et f une isométrie qui fixe A, B et C.*

1. *Montrer que A, B et C ne sont pas alignés.*
2. *En déduire f, puis l'image par f d'un point M quelconque, par exemple $D(-2, 7)$.*

Solution 7

1. *On a $\overrightarrow{AB}(2, 3)$ et $\overrightarrow{AC}(3, -3)$ (Théorème 14.10 (ii) du cours 14 [2]), et*

$$2 \times (-3) - 3 \times 3 = -15 \neq 0.$$

   Par le Théorème 14.11 du cours 14, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; par le Théorème 14.6 du cours 14 [2], A, B et C ne sont pas alignés.

2. *L'isométrie f fixe les trois points non alignés A, B et C : par le Théorème 20.10 (ii) du cours 20 [5], $f = \mathrm{Id}$. Tout point M est donc sa propre image : $f(M) = M$, et en particulier $f(D) = D(-2, 7)$.*

   Il ne suffit pas que f fixe un seul de ces points : par exemple $r\left(C, \frac{\pi}{2}\right)$ est une isométrie qui fixe C (Théorème 20.6 du cours 20) et ne fixe pas A, puisque $A \neq C$ et que, $\frac{\pi}{2}$ n'étant pas nul modulo 2π, C est son seul point invariant (Théorème 20.16 (iii) du cours 20 [5]).

Exercice 8 *Soit f une isométrie. Pour tout point P, on note $P' = f(P)$.*

1. *Soient A, B, C, D quatre points tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient orthogonaux. Montrer que $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont orthogonaux.*

2. *On appelle* rectangle *un parallélogramme $ABCD$ tel que $A \neq B$, $A \neq D$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Montrer que l'image $A'B'C'D'$ d'un rectangle $ABCD$ est un rectangle.*

Solution 8

1. *Par le Théorème 15.4 du cours 15 [3], $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Par le Théorème 20.7 (ii) du cours 20 [5], $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, donc $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{C'D'}$ sont orthogonaux (Théorème 15.4 du cours 15 [3]). On n'a pas besoin que les deux vecteurs aient la même origine, ni qu'ils soient non nuls.*

2. *Soit $ABCD$ un rectangle.*

   - *$ABCD$ est un parallélogramme, donc $A'B'C'D'$ en est un (Corollaire 20.1 (vi) du cours 20 [5]).*
   - *$A'B' = AB > 0$ et $A'D' = AD > 0$ (Définition 20.6 du cours 20 [5]), donc $A' \neq B'$ et $A' \neq D'$.*
   - *Par le Théorème 20.7 (i) du cours 20 [5], appliqué aux points A, B, D, $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.*

   Les trois conditions de la définition sont vérifiées : $A'B'C'D'$ est un rectangle.

Exercice 9 *Soient ABC un triangle isocèle en A, c'est-à-dire tel que A, B, C ne soient pas alignés et $AB = AC$, et f une isométrie ; on note A', B', C' les images de A, B, C.*

1. *Montrer que $A'B'C'$ est un triangle isocèle en A'.*

2. *Montrer que $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$ et $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.*

Solution 9

1. *Les points A, B, C ne sont pas alignés ; par le Corollaire 20.1 (ii) du cours 20 [5], A', B', C' ne le sont pas non plus : $A'B'C'$ est un triangle. Comme f conserve les distances (Définition 20.6 du cours 20 [5]),*

$$A'B' = AB = AC = A'C'.$$

   Le triangle $A'B'C'$ est donc isocèle en A'. On n'a utilisé que l'égalité $AB = AC$: un triangle isocèle n'est pas forcément équilatéral.

2. *Les points A, B, C n'étant pas alignés, ils sont distincts deux à deux. Le Corollaire 20.1 (v) du cours 20 [5], appliqué avec le sommet A ($B \neq A$, $C \neq A$), donne $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$; appliqué avec le sommet B ($A \neq B$, $C \neq B$), il donne $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.*

Exercice 10 *Soient A, B, C trois points non alignés et f, g deux isométries telles que $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$ et $f(C) = g(C)$.*

1. *Montrer, à l'aide du Théorème 20.8 du cours 20 [5], que $f = g$.*

   Indication : écrire $\overrightarrow{AM}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. *Application : soient $B(1,0)$ et $C(0,1)$, et f une isométrie telle que $f(O) = O$, $f(B) = C$ et $f(C) = E$, où $E(-1,0)$. Montrer que $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Solution 10

1. *Notons $A' = f(A) = g(A)$, $B' = f(B) = g(B)$ et $C' = f(C) = g(C)$. Comme A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires (Théorème 14.6 du cours 14) : ils forment une base du plan (Définition 14.8 du cours 14 [2]). Soit M un point. Par le Théorème 14.9 (i) du cours 14 [2], il existe des réels x, y tels que*

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

   Soient $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$. Le Théorème 20.8 du cours 20 [5], appliqué à f puis à g, donne

$$\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'M''}.$$

   Par le Théorème 14.1 (i) du cours 14 [2], il y a un seul point P tel que $\overrightarrow{A'P}$ soit égal à ce vecteur : $M' = M''$. Ainsi $f(M) = g(M)$ pour tout point M, et $f = g$ (Définition 19.9 du cours 19 [4]). C'est le Théorème 20.10 (i) du cours 20 [5].

2. *Les vecteurs $\overrightarrow{OB}(1,0)$ et $\overrightarrow{OC}(0,1)$ ne sont pas colinéaires, car $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$ (Théorème 14.11 du cours 14) : O, B, C ne sont pas alignés (Théorème 14.6 du cours 14 [2]). Soit $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, d'écriture complexe $z' = \boldsymbol{i}z$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20) ; c'est une isométrie (Théorème 20.6 du cours 20 [5]). Elle envoie 0 sur 0, 1 sur $\boldsymbol{i}$ et $\boldsymbol{i}$ sur -1 : $r(O) = O = f(O)$, $r(B) = C = f(B)$ et $r(C) = E = f(C)$. Par la question 1, $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Exercice 11 *Soient $\mathcal{C}$ le cercle de centre $I(2,1)$ et de rayon 3, et $r = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$. Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par r, puis une équation de cette image.*

Solution 11 *La rotation r est une isométrie (Théorème 20.6 du cours 20 [5]). Par le Théorème 20.9 (iv) du cours 20 [5], l'image de $\mathcal{C}$ par r est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre $I' = r(I)$ et de rayon 3. L'écriture complexe de r est $z' = \boldsymbol{i}z$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]) ; l'affixe de I est $2+\boldsymbol{i}$, donc celle de I' est $\boldsymbol{i}(2+\boldsymbol{i}) = -1+2\boldsymbol{i}$: $I'(-1,2)$.*

Un point $M(x,y)$ est sur $\mathcal{C}'$ si et seulement si $I'M = 3$, c'est-à-dire $I'M^2 = 9$, car $I'M \geq 0$. Par le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [2], une équation de $\mathcal{C}'$ est

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9.$$

4 Composée de deux symétries orthogonales

Exercice 12 *Soient $\mathcal{D}$ l'axe réel, c'est-à-dire la droite $(O, \overrightarrow{u})$, et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $y = x$.*

1. *Déterminer les écritures complexes de $S_{\mathcal{D}}$ et de $S_{\mathcal{D}'}$.*
2. *Déterminer l'écriture complexe de $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$, et reconnaître cette composée. Comparer avec le Théorème 20.12 du cours 20 [5].*
3. *Mêmes questions pour $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$.*

Solution 12

1. *La droite $\mathcal{D}$ passe par O et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, d'affixe $1 = e^{\boldsymbol{i}0}$. La droite $\mathcal{D}'$ passe par O et par le point $(1,1)$: elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w'}(1,1)$, et aussi $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{w'}$, d'affixe $\frac{1}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$ (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2], Définition 12.5 du cours 12 [1]). Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], avec $\omega = 0$,*

   $$S_{\mathcal{D}} : z \mapsto z' = \bar{z} \quad et \quad S_{\mathcal{D}'} : z \mapsto z' = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\bar{z} = \boldsymbol{i}\bar{z}.$$

   En coordonnées, $S_{\mathcal{D}'}$ associe au point (x,y) le point (y,x), car $\boldsymbol{i}(x-\boldsymbol{i}y) = y+\boldsymbol{i}x$.

2. *La composée $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ applique d'abord $S_{\mathcal{D}}$, puis $S_{\mathcal{D}'}$: elle envoie z sur $\bar{z}$, puis sur $\boldsymbol{i}\overline{\bar{z}} = \boldsymbol{i}z$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]). Comme $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, c'est la rotation $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]).*

   Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en O : un point commun vérifie $y = 0$ et $y = x$, donc c'est O. Avec $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w'}(1,1)$, une mesure θ de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ est un argument de $\frac{1+\boldsymbol{i}}{1} = \sqrt{2}e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$ (Théorème 12.15 du cours 12), soit $\theta = \frac{\pi}{4}$ (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [1]). Le Théorème 20.12 du cours 20 [5] donne $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = r\left(O, 2\times\frac{\pi}{4}\right) = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, ce qui concorde avec le calcul.

3. *La composée $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ envoie z sur $\boldsymbol{i}\bar{z}$, puis sur $\overline{\boldsymbol{i}\bar{z}} = -\boldsymbol{i}z$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]). Comme $-\boldsymbol{i} = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, c'est la rotation $r\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20), en accord avec la seconde égalité du Théorème 20.12 du cours 20 [5], $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'} = r(O, -2\theta)$. Comme $\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, les deux composées sont distinctes (Théorème 20.5 (ii) du cours 20) : l'ordre des symétries compte (Remarque 20.4 du cours 20 [5]).*

Exercice 13 *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 0$ et $\mathcal{D}'$ la droite d'équation $x = 3$.*

1. *Déterminer les écritures complexes de $S_{\mathcal{D}}$ et de $S_{\mathcal{D}'}$.*
2. *Montrer que $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ et $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ sont des translations, dont on donnera les vecteurs et le sens.*
3. *Soient $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $y = 1$ et $\overrightarrow{w}(0,4)$. Déterminer une droite $\mathcal{D}_2$ telle que $t_{\overrightarrow{w}} = S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1}$, et contrôler le résultat par les écritures complexes.*

Solution 13

1. *La droite $\mathcal{D}$ passe par O et la droite $\mathcal{D}'$ par le point $\Omega(3,0)$, d'affixe 3 ; toutes deux ont pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, d'affixe $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $e^{2\boldsymbol{i}\alpha} = e^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$,*

$$S_{\mathcal{D}} : z \mapsto z' = -\bar{z} \quad \text{et} \quad S_{\mathcal{D}'} : z \mapsto z' = 3 - \overline{z-3} = 6 - \bar{z}.$$

2. *Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont le même vecteur directeur $\overrightarrow{v}$: elles sont parallèles (Définition 14.6 (iii) du cours 14 [2]), et distinctes, car $O \in \mathcal{D}$ et $O \notin \mathcal{D}'$. La composée $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $-\bar{z}$, puis sur $6 - \overline{(-\bar{z})} = z + 6$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]) : c'est la translation de vecteur $6\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(6,0)$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]). La composée $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ envoie z sur $6 - \bar{z}$, puis sur $-\overline{(6-\bar{z})} = z - 6$: c'est la translation de vecteur $-6\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(-6,0)$.*

   On obtient aussi ces vecteurs par le Théorème 20.13 du cours 20 [5]. Le point O de $\mathcal{D}$ a pour projeté orthogonal $\Omega(3,0)$ sur $\mathcal{D}'$, car $\Omega \in \mathcal{D}'$ et $\overrightarrow{O\Omega} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, donc $\overrightarrow{O\Omega} \perp \overrightarrow{v}$ (Théorème 15.4 et Définition 15.3 du cours 15 [3]), et $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}} = t_{2\overrightarrow{O\Omega}}$, avec $2\overrightarrow{O\Omega}(6,0)$. Dans l'autre ordre, le point Ω de $\mathcal{D}'$ a pour projeté O sur $\mathcal{D}$, et le vecteur est $2\overrightarrow{\Omega O}(-6,0)$. Le vecteur de $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ a le sens de $\overrightarrow{O\Omega}$, de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$, et sa norme 6 est le double de $O\Omega = 3$; celui de $S_{\mathcal{D}} \circ S_{\mathcal{D}'}$ est son opposé.

3. *La droite $\mathcal{D}_1$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1 \times 0 + 0 \times 4 = 0$ (Théorèmes 15.2 (i) et 15.4 du cours 15 [3]). Par le Théorème 20.14 (ii) du cours 20 [5], la droite $\mathcal{D}_2 = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D}_1)$ convient : c'est la parallèle à $\mathcal{D}_1$ passant par $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(K)$, où $K(0,1) \in \mathcal{D}_1$, soit par le point $(0,3)$. Ainsi $\mathcal{D}_2$ est la droite d'équation $y = 3$.*

Contrôle : $\mathcal{D}_1$ passe par le point d'affixe $\boldsymbol{i}$ et $\mathcal{D}_2$ par le point d'affixe $3\boldsymbol{i}$, avec le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, d'affixe $e^{\boldsymbol{i}0}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], $S_{\mathcal{D}_1}$ envoie z sur $\boldsymbol{i}+\overline{z-\boldsymbol{i}} = \overline{z}+2\boldsymbol{i}$, et $S_{\mathcal{D}_2}$ envoie z sur $\overline{z}+6\boldsymbol{i}$. La composée $S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1}$ envoie donc z sur $\overline{\overline{z}+2\boldsymbol{i}}+6\boldsymbol{i} = z-2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{i} = z+4\boldsymbol{i}$: c'est $t_{\overrightarrow{w}}$, puisque $\overrightarrow{w}$ a pour affixe $4\boldsymbol{i}$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]).

Exercice 14 *Soient $r = r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\mathcal{D}$ l'axe réel, et $\mathcal{D}'$ la droite passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{w'}$ d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$.*

1. *Montrer que $r = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$.*
2. *Contrôler ce résultat par les écritures complexes.*
3. *Soit $\mathcal{D}_1$ l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite $(O, \overrightarrow{v})$. Déterminer une droite $\mathcal{D}'_1$ telle que $r = S_{\mathcal{D}'_1} \circ S_{\mathcal{D}_1}$, et contrôler le résultat de la même façon.*

Solution 14

1. *La droite $\mathcal{D}$ passe par O et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}$, d'affixe 1. Les mesures de $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}\right)$ sont les arguments de $\frac{e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}}{1} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$ (Théorème 12.15 du cours 12) : $\frac{\pi}{3}$ en est une (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [1]). Comme $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{3}$, le Théorème 20.14 (i) du cours 20 [5] donne $r = S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$.*
2. *Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], avec $\omega = 0$, $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $\overline{z}$ et $S_{\mathcal{D}'}$ envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{z}$. La composée $S_{\mathcal{D}'} \circ S_{\mathcal{D}}$ envoie donc z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{\overline{z}} = e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}z$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]), qui est l'écriture complexe de r (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]).*
3. *La droite $\mathcal{D}_1$ passe par O et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$. Soit $\mathcal{D}'_1$ la droite passant par O de vecteur directeur d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{6}}$, où $\frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$. Les mesures de l'angle orienté de $\overrightarrow{v}$ et de ce vecteur sont les arguments de $\frac{e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{6}}}{e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{3}}$ (Théorèmes 12.15 et 12.13 (ii) du cours 12 [1]) ; $\frac{\pi}{3}$ en est une. Le Théorème 20.14 (i) du cours 20 [5] donne $r = S_{\mathcal{D}'_1} \circ S_{\mathcal{D}_1}$. Contrôle : par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], $S_{\mathcal{D}_1}$ envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\pi}\overline{z} = -\overline{z}$ et $S_{\mathcal{D}'_1}$ envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{3}}\overline{z}$. La composée envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{3}}\overline{(-\overline{z})} = -e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{3}}z = e^{\boldsymbol{i}\pi}e^{\boldsymbol{i}\frac{5\pi}{3}}z = e^{\boldsymbol{i}\frac{8\pi}{3}}z$ (Théorème 12.13 (i) du cours 12 [1]). Comme $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi$, on a $e^{\boldsymbol{i}\frac{8\pi}{3}} = e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}$ (Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [1]) : la composée est bien r. Dans le Théorème 20.14 (i) du cours 20 [5], la première droite est une droite quelconque passant par le centre : les questions 1 et 3 en donnent deux choix.*

5 Points invariants et classification

Exercice 15 *Soit f l'application du plan d'écriture complexe $z' = -\boldsymbol{i}z + 1 + \boldsymbol{i}$.*

1. *Montrer que f est une isométrie.*

2. *Montrer que f a un point invariant et un seul, Ω, dont on donnera les coordonnées.*

3. *En déduire la nature de f, et ses éléments caractéristiques.*

Solution 15

1. *Soient M_1 et M_2 deux points d'affixes z_1 et z_2, d'images M_1' et M_2'. On a $z_2' - z_1' = -\boldsymbol{i}(z_2 - z_1)$, donc, par les Théorèmes 12.7 (ii) et 12.6 (ii) du cours 12 [1], $M_1'M_2' = |-\boldsymbol{i}|\,|z_2 - z_1| = M_1M_2$. Ainsi f est une isométrie (Définition 20.6 du cours 20 [5]).*

2. *Le point d'affixe z est invariant si et seulement si $z = -\boldsymbol{i}z + 1 + \boldsymbol{i}$, soit $(1+\boldsymbol{i})\,z = 1 + \boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $z = 1$. Le seul point invariant est $\Omega\,(1,0)$.*

3. *L'isométrie f a un point invariant et un seul, Ω : par le Théorème 20.17 (iii) du cours 20 [5], $f = r\,(\Omega,\theta)$, avec $\theta \neq 0\ [2\pi]$. Déterminons θ. Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5], $f(M)$ a pour affixe z' telle que $z' - 1 = e^{\boldsymbol{i}\theta}(z-1)$; pour $z = 0$, $z' = 1 + \boldsymbol{i}$, d'où $\boldsymbol{i} = -e^{\boldsymbol{i}\theta}$, soit $e^{\boldsymbol{i}\theta} = -\boldsymbol{i} = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$. Par le Théorème 12.9 (iii) du cours 12 [1], $\theta = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, et $f = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ (Théorème 20.5 (ii) du cours 20 [5]).*

   On peut aussi conclure directement : $z' - 1 = -\boldsymbol{i}z + \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}(z-1) = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}(z-1)$, et le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5] donne $f = r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 16 *Soient les points $A\,(1,0)$, $B\,(0,1)$ et $C\,(1,1)$, et f une isométrie telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(O) = C$.*

1. *Montrer que $f = S_{(AB)}$.*

2. *Déterminer l'écriture complexe de $S_{(AB)}$, et contrôler que $S_{(AB)}(O) = C$.*

Solution 16

1. *L'isométrie f fixe les deux points distincts A et B : par le Théorème 20.17 (ii) du cours 20 [5], $f = \mathrm{Id}$ ou $f = S_{(AB)}$. Or $f(O) = C \neq O$, donc $f \neq \mathrm{Id}$. Ainsi $f = S_{(AB)}$.*

2. *La droite (AB) passe par A, d'affixe 1, et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\,(-1,1)$, d'affixe $-1 + \boldsymbol{i} = \sqrt{2}e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{4}}$, car $e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (Définition 12.5 du cours 12 [1]). Le vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}$ la dirige aussi (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]) et a pour affixe $e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{4}}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5], avec $\omega = 1$, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ et $e^{2\boldsymbol{i}\alpha} = e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{2}} = -\boldsymbol{i}$,*

$$z' - 1 = -\boldsymbol{i}\,\overline{z-1} = -\boldsymbol{i}\,(\bar{z} - 1), \quad \textit{soit} \quad z' = -\boldsymbol{i}\bar{z} + 1 + \boldsymbol{i}.$$

Pour $z = 0$, $z' = 1 + \boldsymbol{i}$, affixe de C : $S_{(AB)}(O) = C$. En coordonnées, $-\boldsymbol{i}(x - \boldsymbol{i}y) = -y - \boldsymbol{i}x$, et $S_{(AB)}$ associe au point (x, y) le point $(1 - y, 1 - x)$; cette application envoie bien $A(1, 0)$ sur $(1, 0)$ et $B(0, 1)$ sur $(0, 1)$.

Exercice 17 *Soit f l'application du plan d'écriture complexe $z' = \bar{z} + 2\boldsymbol{i}$.*

1. *Montrer que f est une isométrie, et déterminer l'ensemble de ses points invariants.*
2. *En déduire la nature de f.*

Solution 17

1. *Pour deux points d'affixes z_1 et z_2, $z_2' - z_1' = \bar{z}_2 - \bar{z}_1 = \overline{z_2 - z_1}$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12), de module $|z_2 - z_1|$ (Théorème 12.6 (i) du cours 12) : par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], f conserve les distances, et c'est une isométrie (Définition 20.6 du cours 20 [5]).*

   Avec $z = x + \boldsymbol{i}y$, le point M est invariant si et seulement si $x + \boldsymbol{i}y = x - \boldsymbol{i}y + 2\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $2y = 2$, soit $y = 1$. L'ensemble des points invariants est la droite Δ d'équation $y = 1$.

2. *L'isométrie f fixe les deux points distincts $K(0, 1)$ et $L(1, 1)$ de Δ, et $(KL) = \Delta$. Par le Théorème 20.17 (ii) du cours 20 [5], $f = \mathrm{Id}$ ou $f = S_\Delta$. Comme $f(O)$ a pour affixe $2\boldsymbol{i} \neq 0$, $f \neq \mathrm{Id}$: f est la symétrie orthogonale S_Δ d'axe la droite $y = 1$.*

   Autre méthode : $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ est l'axe réel, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, et $\overrightarrow{w}(0, 2)$ (Théorème 20.4 (i) et (iv) du cours 20 [5]). Comme $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ (Théorèmes 15.2 (i) et 15.4 du cours 15 [3]), le Théorème 20.19 (ii) du cours 20 donne $f = S_{\mathcal{D}'}$, avec $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w}}(\mathcal{D})$, la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par le point $(0, 1)$ (Théorème 20.14 (ii) du cours 20 [5]), c'est-à-dire Δ.

Exercice 18 *Soit f l'application du plan d'écriture complexe $z' = \bar{z} + 2 + 2\boldsymbol{i}$.*

1. *Écrire f sous la forme $t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$, où $\mathcal{D}$ est l'axe réel.*
2. *En déduire que f est une symétrie glissante, dont on donnera l'axe et le vecteur.*
3. *Montrer que f n'a aucun point invariant, et calculer $f \circ f$.*

Solution 18

1. *Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20, $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $\bar{z}$; par le Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5], la translation $t_{\overrightarrow{w}}$ de vecteur $\overrightarrow{w}(2, 2)$, d'affixe $2 + 2\boldsymbol{i}$, envoie $\bar{z}$ sur $\bar{z} + 2 + 2\boldsymbol{i}$. Donc $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_{\mathcal{D}}$. Le vecteur $\overrightarrow{w}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$: f n'est pas écrite sous la forme de la Définition 20.7 du cours 20 [5].*

2. *Décomposons* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$, *avec* $\overrightarrow{w_1}(2,0) = 2\overrightarrow{u}$, *colinéaire à* $\overrightarrow{u}$, *et* $\overrightarrow{w_2}(0,2)$, *orthogonal à* $\overrightarrow{u}$ *(Théorèmes 15.2 (i) et 15.4 du cours 15 [3]). Par le Théorème 20.19 (iii) du cours 20,* $f = t_{\overrightarrow{w_1}} \circ S_{\mathcal{D}'}$, *avec* $\mathcal{D}' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{w_2}}(\mathcal{D})$, *la parallèle à* $\mathcal{D}$ *passant par le point* $(0,1)$ *(Théorème 20.14 (ii) du cours 20 [5]), c'est-à-dire la droite d'équation* $y = 1$. *Comme* $\overrightarrow{w_1} \neq \overrightarrow{0}$, f *est la symétrie glissante d'axe la droite* $y = 1$ *et de vecteur* $2\overrightarrow{u}$ *(Définition 20.7 du cours 20 [5]).*

   On contrôle cette écriture : $S_{\mathcal{D}'}$ *envoie* z *sur* $\boldsymbol{i} + \overline{z - \boldsymbol{i}} = \bar{z} + 2\boldsymbol{i}$ *(Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [5]), puis* $t_{2\overrightarrow{u}}$ *envoie* $\bar{z} + 2\boldsymbol{i}$ *sur* $\bar{z} + 2 + 2\boldsymbol{i}$.

3. *Par le Théorème 20.20 (i) du cours 20 [5], la symétrie glissante* f *n'a aucun point invariant. Directement : avec* $z = x + \boldsymbol{i}y$, *l'égalité* $z = \bar{z} + 2 + 2\boldsymbol{i}$ *s'écrit* $x + \boldsymbol{i}y = (x+2) + \boldsymbol{i}(2-y)$, *et l'égalité des parties réelles donnerait* $0 = 2$, *ce qui est impossible.*

   Par le Théorème 20.20 (ii) du cours 20 [5], $f \circ f = t_{2\overrightarrow{w_1}} = t_{4\overrightarrow{u}}$. *Par le calcul,* $f \circ f$ *envoie* z *sur* $\overline{\bar{z} + 2 + 2\boldsymbol{i}} + 2 + 2\boldsymbol{i} = z + 2 - 2\boldsymbol{i} + 2 + 2\boldsymbol{i} = z + 4$ *(Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]), ce qui est l'écriture de* $t_{4\overrightarrow{u}}$ *(Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]).*

Exercice 19 *Soient* $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *l'application qui, au point* $M(x,y)$, *associe le point* $(2-x, y+3)$, *et* $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *l'application qui, au point* $M(x,y)$, *associe le point* $(3-y, x+1)$.

1. *Montrer que* f *et* g *sont des isométries.*
2. *Déterminer les points invariants de* g, *puis la nature de* g *et ses éléments caractéristiques.*
3. *Montrer que* f *n'a aucun point invariant et n'est pas une translation. En déduire que* f *est une symétrie glissante.*
4. *Calculer* $f \circ f$. *En déduire le vecteur* $\overrightarrow{w}$ *de* f, *puis son axe.*

Solution 19

1. *Soient* $M(x_1, y_1)$ *et* $N(x_2, y_2)$ *deux points. Le repère étant orthonormé, le Théorème 14.18 (i) du cours 14 [2] donne*

$$\begin{aligned} f(M) f(N)^2 &= ((2-x_2) - (2-x_1))^2 + ((y_2+3) - (y_1+3))^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = MN^2 \end{aligned}$$

   et

$$g(M) g(N)^2 = (y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = MN^2.$$

   Les distances étant positives, $f(M) f(N) = MN$ *et* $g(M) g(N) = MN$: f *et* g *sont des isométries (Définition 20.6 du cours 20 [5]).*

2. *Le point $M(x,y)$ est invariant par g si et seulement si $3-y=x$ et $x+1=y$. En ajoutant, $4=2y$, d'où $y=2$ et $x=1$, qui conviennent : le seul point invariant de g est $\Omega(1,2)$. Par le Théorème 20.17 (iii) du cours 20 [5], $g=r(\Omega,\theta)$, avec $\theta\neq 0\ [2\pi]$.*

   En affixes, $z'=(3-y)+\boldsymbol{i}(x+1)=\boldsymbol{i}(x+\boldsymbol{i}y)+3+\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}z+3+\boldsymbol{i}$. Avec $\omega=1+2\boldsymbol{i}$, on a $\boldsymbol{i}z+3+\boldsymbol{i}-\omega=\boldsymbol{i}z+2-\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}(z-\omega)$, donc $z'-\omega=e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}(z-\omega)$: g est la rotation de centre $\Omega(1,2)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [5]).

3. *Le point $M(x,y)$ serait invariant par f si $2-x=x$ et $y+3=y$, ce qui est impossible : f n'a aucun point invariant. Les images de $O(0,0)$ et de $A(1,0)$ sont $O'(2,3)$ et $A'(1,3)$, donc $\overrightarrow{OO'}(2,3)\neq\overrightarrow{AA'}(0,3)$: f n'est pas une translation (Définition 20.2 du cours 20 [5]). Par le Théorème 20.21 du cours 20 [5], f est une symétrie glissante.*

4. *On a $f\circ f(x,y)=f(2-x,y+3)=(x,y+6)$: $f\circ f$ est la translation de vecteur $(0,6)$, c'est-à-dire $6\overrightarrow{v}$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [5]). Soit $f=t_{\overrightarrow{w}}\circ S_\Delta$ une écriture de f comme symétrie glissante. Par le Théorème 20.20 (ii) du cours 20, $f\circ f=t_{2\overrightarrow{w}}$, donc $2\overrightarrow{w}=6\overrightarrow{v}$ (Définition 20.2 du cours 20 [5]) : $\overrightarrow{w}=3\overrightarrow{v}$, de coordonnées $(0,3)$.*

   Par les Théorèmes 20.1 et 20.5 (i) du cours 20 [5], $S_\Delta=t_{-\overrightarrow{w}}\circ f$, qui associe au point (x,y) le point $(2-x,y)$, d'affixe $2-\bar{z}=1-\overline{z-1}=1+e^{\boldsymbol{i}\pi}\overline{z-1}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20, avec $\omega=1$ et $\alpha=\frac{\pi}{2}$, c'est la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $x=1$, dirigée par $\overrightarrow{v}$; comme deux symétries orthogonales égales ont les mêmes points invariants (Théorème 20.16 (ii) du cours 20 [5]), Δ est cette droite. Ainsi f est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $3\overrightarrow{v}$, non nul et colinéaire à $\overrightarrow{v}$ (Définition 20.7 du cours 20 [5]).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 19. Logique et ensembles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.