Exercices type Bac & Solutions : Déplacements et Antidéplacements

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les énoncés et les solutions, un renvoi comme *Théorème 21.13 du cours 21* désigne un énoncé numéroté du cours 21 [4], sur les déplacements et les antidéplacements ; un renvoi comme *Théorème 20.4 du cours 20* désigne un énoncé numéroté du cours 20 [3], sur les isométries du plan ; de même pour le cours 12 [1], sur les nombres complexes, et le cours 14 [2], sur les vecteurs et la géométrie. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; un point $M(x, y)$ a pour affixe $z = x + \boldsymbol{i}y$, et son image M' par une application du plan a pour affixe z' ; de même, $A' = f(A)$ a pour affixe a' (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Les angles sont mesurés en radians. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [1]) ; l'égalité modulo 2π s'écrit $\theta = \theta'$ $[2\pi]$. Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g (Définition 20.1 du cours 20 [3]).

Table des matières

1 Déplacements et antidéplacements **2**

2 Classification **3**

3 Deux points et leurs images **5**

4 Angle d'un déplacement **7**

5 Composées de déplacements **8**

6 Écritures complexes **10**

7 Antidéplacements et forme réduite **12**

1 Déplacements et antidéplacements

Exercice 1 *Soient $\mathcal{D}$ l'axe réel, et A, B, C les points d'affixes $a = 1$, $b = 2 + \boldsymbol{i}$ et $c = \boldsymbol{i}$. On note A', B', C' leurs images par la symétrie orthogonale $S_{\mathcal{D}}$.*

1. *Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.*
2. *Déterminer les affixes de A', B', C', puis une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.*
3. *Comparer ces deux mesures. En déduire, sans utiliser le Théorème 21.4 du cours 21 [4], que $S_{\mathcal{D}}$ n'est pas un déplacement.*

Solution 1

1. *On a $b \neq a$ et $c \neq a$, donc $A \neq B$ et $A \neq C$. Par le Théorème 12.15 du cours 12 [1], les mesures de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont les arguments de*

$$q = \frac{c-a}{b-a} = \frac{-1+\boldsymbol{i}}{1+\boldsymbol{i}} = \frac{(-1+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})}{(1+\boldsymbol{i})(1-\boldsymbol{i})} = \frac{2\boldsymbol{i}}{2} = \boldsymbol{i}.$$

   Comme $\boldsymbol{i} = 1 \times e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\pi}{2}$ est un argument de $\boldsymbol{i}$ (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [1]) : c'est une mesure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

2. *L'axe réel passe par O et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, d'affixe $1 = e^{\boldsymbol{i}0}$; par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3], $S_{\mathcal{D}}$ a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$. Donc $a' = 1$, $b' = 2 - \boldsymbol{i}$ et $c' = -\boldsymbol{i}$. Les mesures de $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ sont les arguments de*

$$q' = \frac{c'-a'}{b'-a'} = \frac{-1-\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}} = \frac{(-1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}{(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})} = \frac{-2\boldsymbol{i}}{2} = -\boldsymbol{i}$$

   (Théorème 12.15 du cours 12 [1]). Comme $-\boldsymbol{i} = 1 \times e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, $-\frac{\pi}{2}$ en est une mesure (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [1]).

3. *Les mesures obtenues sont opposées, et $q' = \bar{q}$. Si $S_{\mathcal{D}}$ était un déplacement, les deux angles auraient les mêmes mesures (Définition 21.1 (i) du cours 21 [4]) : $-\frac{\pi}{2}$ serait un argument de $\boldsymbol{i}$, et l'on aurait $\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ (Définition 12.6 du cours 12 [1]), c'est-à-dire $\pi = 2k\pi$ pour un entier k, ce qui est impossible, car $k = \frac{1}{2}$ n'est pas entier. Donc $S_{\mathcal{D}}$ n'est pas un déplacement.*

Exercice 2 *Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ trois droites et $f = S_{\mathcal{D}_3} \circ S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1}$.*

1. *L'application f conserve-t-elle les angles orientés, ou les change-t-elle en leurs opposés ?*

2. *Montrer que f n'est ni l'identité, ni une rotation, ni une translation. Que peut être f ?*

3. *Que vaut f lorsque $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3$?*

Solution 2

1. *L'application f est la composée de $n = 3$ symétries orthogonales ; comme 3 est impair, c'est un antidéplacement (Corollaire 21.1 du cours 21) : elle change les angles orientés en leurs opposés (Définition 21.1 (ii) du cours 21 [4]).*

2. *Par le Théorème 21.4 du cours 21 [4], une isométrie n'est pas à la fois un déplacement et un antidéplacement : f n'est donc pas un déplacement. Or l'identité, les rotations et les translations sont des déplacements (Théorème 21.2 (i) du cours 21 [4]) : f n'est aucune d'elles. Par le tableau du Théorème 21.4 du cours 21 [4], les antidéplacements sont les symétries orthogonales et les symétries glissantes : f est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.*

3. *Si $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}$, alors $S_\mathcal{D} \circ S_\mathcal{D} = \mathrm{Id}$, car $S_\mathcal{D}$ est une involution (Théorème 20.5 (iii) du cours 20), et $f = S_\mathcal{D} \circ \mathrm{Id} = S_\mathcal{D}$ (Théorème 20.1 (ii) du cours 20 [3]) : c'est une symétrie orthogonale. L'Exercice 16 donne trois droites pour lesquelles f est une symétrie glissante : les deux cas se produisent.*

2 Classification

Exercice 3 *Soient Ω un point, θ un réel et $\mathcal{D}$ une droite.*

1. *Les applications $r(\Omega, \theta) \circ S_\mathcal{D}$ et $S_\mathcal{D} \circ r(\Omega, \theta)$ sont-elles des déplacements ou des antidéplacements ? Que peuvent-elles être ?*

2. *Dans cette question, $\Omega = O$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{D}$ est l'axe réel. Déterminer les écritures complexes de $f = r\left(O, \frac{\pi}{2}\right) \circ S_\mathcal{D}$ et de $g = S_\mathcal{D} \circ r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$, leurs points invariants, puis leur nature et leurs éléments caractéristiques.*

Solution 3

1. *La rotation $r(\Omega, \theta)$ est un déplacement et $S_\mathcal{D}$ un antidéplacement (Théorème 21.2 du cours 21 [4]). Par le Théorème 21.3 (ii) du cours 21 [4], valable dans les deux ordres, les deux composées sont des antidéplacements. Ce ne sont donc pas des déplacements (Théorème 21.4 du cours 21 [4]) : ni des rotations, ni des translations. Par le tableau du Théorème 21.4 du cours 21 [4], chacune est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.*

2. *Par le Théorème 20.4 (ii) et (iv) du cours 20 [3], $r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}z = \boldsymbol{i}z$, et $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $\bar{z}$. La composée f applique d'abord $S_{\mathcal{D}}$: elle envoie z sur $\boldsymbol{i}\bar{z}$. La composée g envoie z sur $\overline{\boldsymbol{i}z} = -\boldsymbol{i}\bar{z}$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]). Ainsi*

$$f : z \mapsto z' = \boldsymbol{i}\bar{z} \quad \text{et} \quad g : z \mapsto z' = -\boldsymbol{i}\bar{z}.$$

Avec $z = x + \boldsymbol{i}y$, on a $\boldsymbol{i}\bar{z} = \boldsymbol{i}(x - \boldsymbol{i}y) = y + \boldsymbol{i}x$. Le point M est invariant par f si et seulement si $x + \boldsymbol{i}y = y + \boldsymbol{i}x$, c'est-à-dire $y = x$: l'ensemble des points invariants de f est la droite Δ_1 d'équation $y = x$. De même, $-\boldsymbol{i}\bar{z} = -y - \boldsymbol{i}x$, et M est invariant par g si et seulement si $x = -y$: l'ensemble des points invariants de g est la droite Δ_2 d'équation $y = -x$.

Les antidéplacements f et g ont des points invariants : par le Théorème 21.16 (i) du cours 21 [4], ce sont des symétries orthogonales, d'axes l'ensemble de leurs points invariants. Ainsi $f = S_{\Delta_1}$ et $g = S_{\Delta_2}$. Les deux composées sont distinctes, car le point $K(1, 1)$ est invariant par f et non par g : l'ordre de la composition compte.

Exercice 4

1. *Soient $\overrightarrow{w}$ un vecteur non nul, Ω et I deux points, et $\mathcal{D}$ une droite. Classer les isométries $t_{\overrightarrow{w}}$, $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$, S_I et $S_{\mathcal{D}}$ en déplacements et antidéplacements, et donner une mesure de l'angle de chaque déplacement.*

2. *Soit U le point d'affixe 1. Donner un déplacement et un antidéplacement qui envoient O sur U.*

Solution 4

1. *Par le Théorème 21.2 (i) du cours 21, $t_{\overrightarrow{w}}$, $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ et S_I sont des déplacements ; par le Théorème 21.2 (ii) du cours 21 [4], $S_{\mathcal{D}}$ est un antidéplacement. Par le Théorème 21.9 (iii) du cours 21 [4], $t_{\overrightarrow{w}}$ est un déplacement d'angle 0 et $r\left(\Omega, \frac{\pi}{2}\right)$ un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$. Comme $S_I = r(I, \pi)$ (Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [3]), S_I est un déplacement d'angle π (Théorème 21.9 (iii) du cours 21 [4]). L'angle n'est défini que pour un déplacement (Définition 21.2 du cours 21 [4]) : $S_{\mathcal{D}}$ n'en a pas.*

2. *Le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe 1 ; la translation $t_{\overrightarrow{u}}$, d'écriture complexe $z' = z + 1$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [3]), envoie O sur U, et c'est un déplacement (Théorème 21.2 (i) du cours 21 [4]).*

   Soit Δ la droite passant par le point K d'affixe $\frac{1}{2}$, de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, d'affixe $\boldsymbol{i} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3], avec $e^{2\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = e^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$, S_Δ a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2} - \overline{\left(z - \frac{1}{2}\right)} = 1 - \bar{z}$; elle envoie 0 sur 1, donc O sur U, et c'est un antidéplacement (Théorème 21.2 (ii) du cours 21 [4]).

Exercice 5

1. *Soit f une isométrie dont l'ensemble des points invariants est exactement une droite $\mathcal{D}$. Montrer que $f = S_{\mathcal{D}}$. L'isométrie f est-elle un déplacement ou un antidéplacement ?*

2. *Une isométrie qui n'a aucun point invariant est-elle nécessairement un déplacement ? un antidéplacement ?*

Solution 5

1. *Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$; alors $(AB) = \mathcal{D}$ (Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [2]). L'isométrie f fixe A et B : par le Théorème 20.17 (ii) du cours 20 [3], $f = \mathrm{Id}$ ou $f = S_{\mathcal{D}}$. Soit M un point qui n'est pas sur $\mathcal{D}$: il n'est pas invariant par f, alors que tout point est invariant par Id (Théorème 20.16 (i) du cours 20 [3]). Donc $f \neq \mathrm{Id}$, et $f = S_{\mathcal{D}}$. Par le Théorème 21.2 (ii) du cours 21, f est un antidéplacement ; ce n'est pas un déplacement (Théorème 21.4 du cours 21 [4]).*

2. *Non, dans les deux cas. La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ n'a aucun point invariant, car $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ (Théorème 20.16 (iv) du cours 20 [3]), et c'est un déplacement (Théorème 21.2 (i) du cours 21 [4]). Soit $\mathcal{D}_0$ l'axe réel, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$: comme $\overrightarrow{u}$ est non nul et colinéaire à $\overrightarrow{u}$, $g = t_{\overrightarrow{u}} \circ S_{\mathcal{D}_0}$ est une symétrie glissante (Définition 20.7 du cours 20) ; elle n'a aucun point invariant (Théorème 20.20 (i) du cours 20 [3]), et c'est un antidéplacement (tableau du Théorème 21.4 du cours 21 [4]). Les points invariants ne distinguent donc pas une translation de vecteur non nul d'une symétrie glissante.*

3 Deux points et leurs images

Exercice 6 *Soient A, B, C, D quatre points.*

1. *On suppose $A \neq C$ et $AC = BD$. Combien y a-t-il de déplacements qui transforment A en B et C en D ? Combien d'antidéplacements ?*

2. *On suppose $A = C$ et $B = D$. Montrer qu'il y a une infinité de déplacements qui transforment A en B et C en D.*

   Indication : pour tout réel θ, considérer $f_\theta = r(B, \theta) \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Solution 6

1. *Appliquons le Théorème 21.7 du cours 21 [4] aux points A, C, B, D, pris dans cet ordre : les points notés A, B, C, D dans le théorème sont ici A, C, B, D, et l'on cherche un déplacement qui envoie A sur B et C sur D. L'hypothèse du théorème s'écrit $AC = BD \neq 0$: on a $AC = BD$, et $AC \neq 0$, car $A \neq C$ (Théorèmes 12.7 (ii) et 12.4 (iii) du cours 12 [1]). Il existe donc un déplacement et un seul, et un antidéplacement et un seul, qui transforment A en B et C en D. L'unicité vient du Théorème 21.6 du cours 21 [4], qui s'applique, car $A \neq C$.*

2. *Soit θ un réel. Comme $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ (Définition 20.2 du cours 20) et que B est invariant par $r(B, \theta)$ (Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3], avec $z = \omega$), $f_\theta(A) = B$: comme $C = A$ et $D = B$, f_θ transforme A en B et C en D. C'est un déplacement d'angle $0 + \theta = \theta$ (Théorèmes 21.9 (iii) et 21.10 (i) du cours 21 [4]).*

   Soient θ et θ' deux réels distincts de $[0, 2\pi[$. Si l'on avait $f_\theta = f_{\theta'}$, θ' serait une mesure de l'angle de f_θ, donc $\theta' = \theta\ [2\pi]$ (Théorème 21.8 (ii) du cours 21 [4]) ; or $\theta' - \theta$ est un réel non nul de $]-2\pi, 2\pi[$, qui n'est pas de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Donc $f_\theta \neq f_{\theta'}$: les déplacements f_θ, pour $\theta \in [0, 2\pi[$, sont deux à deux distincts, et il y en a une infinité. L'hypothèse $A \neq C$ de la question 1 ne peut donc pas être omise.

Exercice 7 *Soient A, B, C, D quatre points.*

1. *On suppose $AC \neq BD$. Existe-t-il un antidéplacement qui transforme A en B et C en D ?*

2. *Dans cette question, A, B, C, D ont pour affixes 0, 1, 5, $5 + \boldsymbol{i}$. Montrer que $AB = CD$, et qu'aucun déplacement ne transforme A en B et C en D.*

3. *Dans cette question, A, B, C, D ont pour affixes $\boldsymbol{i}$, $-\boldsymbol{i}$, $2\boldsymbol{i}$, $-2\boldsymbol{i}$. Montrer que $AB \neq CD$, et qu'un antidéplacement transforme A en B et C en D.*

Solution 7

1. *Non. Un antidéplacement est une isométrie (Définition 21.1 du cours 21 [4]). Si une isométrie f transformait A en B et C en D, on aurait $BD = f(A) f(C) = AC$ (Définition 20.6 du cours 20 [3]), contrairement à l'hypothèse. Aucune isométrie, donc aucun antidéplacement et aucun déplacement, ne transforme A en B et C en D.*

2. *Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], $AB = |1 - 0| = 1$ et $CD = |(5 + \boldsymbol{i}) - 5| = |\boldsymbol{i}| = 1$: $AB = CD$. Mais $AC = |5| = 5$ et $BD = |4 + \boldsymbol{i}| = \sqrt{17}$, et $\sqrt{17} \neq 5$, car $17 \neq 25$: $AC \neq BD$. Par la question 1, aucun déplacement ne transforme A en B et C en D. La condition pertinente porte sur AC et BD, et non sur AB et CD.*

3. *On a $AB = |-2\boldsymbol{i}| = 2$ et $CD = |-4\boldsymbol{i}| = 4$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1]) : $AB \neq CD$. Soit $\mathcal{D}$ l'axe réel : $S_\mathcal{D}$ a pour écriture complexe $z' = \bar{z}$ (Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3]), et $\overline{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$, $\overline{2\boldsymbol{i}} = -2\boldsymbol{i}$. Ainsi $S_\mathcal{D}$ transforme A en B et C en D, et c'est un antidéplacement (Théorème 21.2 (ii) du cours 21 [4]). Ici $AC = 1 = BD$, comme l'exige la question 1.*

4 Angle d'un déplacement

Exercice 8 *Soient Ω le point d'affixe 1, $\overrightarrow{w}$ le vecteur d'affixe $2\boldsymbol{i}$, $f = r\left(\Omega, \frac{3\pi}{4}\right)$ et $g = t_{\overrightarrow{w}}$.*

1. *Déterminer une mesure de l'angle de chacun des déplacements f^{-1}, $g \circ f$ et $f \circ g$. En déduire leur nature.*
2. *Montrer que $g \circ f \neq f \circ g$.*
3. *Soient $h = f \circ f \circ f \circ f$ et $k = h \circ h$. Montrer que $h = S_\Omega$ et que $k = \mathrm{Id}$.*

Solution 8

1. *Par le Théorème 21.9 (iii) du cours 21 [4], f est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et g un déplacement d'angle 0. Par le Théorème 21.10 du cours 21 [4], f^{-1} est un déplacement d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, et $g \circ f$, $f \circ g$ sont des déplacements d'angle $\frac{3\pi}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4}$. Ces angles ne sont pas nuls modulo 2π : $\pm\frac{3\pi}{4}$ n'est pas de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, car $\pm\frac{3}{8}$ n'est pas entier. Par le Théorème 21.9 (ii) du cours 21 [4], f^{-1} est une rotation d'angle $-\frac{3\pi}{4}$, et $g \circ f$, $f \circ g$ sont des rotations d'angle $\frac{3\pi}{4}$. Comme $f(\Omega) = \Omega$, on a $f^{-1}(\Omega) = \Omega$ (Théorème 20.1 (iii) du cours 20 [3]) : le centre de f^{-1}, son unique point invariant (Théorème 21.9 (ii) du cours 21 [4]), est Ω.*
2. *Posons $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\omega = 1$ et $c = 2\boldsymbol{i}$. Comme $\theta \neq 0\ [2\pi]$, le Théorème 21.12 du cours 21 [4] donne les centres Ω_1 de $g \circ f = t_{\overrightarrow{w}} \circ r(\Omega, \theta)$ et Ω_2 de $f \circ g = r(\Omega, \theta) \circ t_{\overrightarrow{w}}$, d'affixes*

$$\omega_1 = \omega + \frac{c}{1 - e^{\boldsymbol{i}\theta}} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \omega + \frac{e^{\boldsymbol{i}\theta} c}{1 - e^{\boldsymbol{i}\theta}}.$$

Alors

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{\left(1 - e^{\boldsymbol{i}\theta}\right) c}{1 - e^{\boldsymbol{i}\theta}} = c \neq 0$$

et les centres sont distincts. Si l'on avait $g \circ f = f \circ g$, ces rotations auraient le même unique point invariant (Théorème 21.9 (ii) du cours 21 [4]), donc le même centre. Ainsi $g \circ f \neq f \circ g$.
3. *Par le Théorème 21.10 (i) du cours 21 [4], $f \circ f$ est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, puis $h = (f \circ f) \circ (f \circ f)$ un déplacement d'angle 3π. Comme $3\pi = \pi + 2\pi$, π est aussi une mesure de l'angle de h (Théorème 21.8 (ii) du cours 21 [4]), et $\pi \neq 0\ [2\pi]$. Par le Théorème 21.9 (ii) du cours 21 [4], h est une rotation d'angle π, dont le centre est l'unique point invariant. Or $f(\Omega) = \Omega$, donc $h(\Omega) = \Omega$: $h = r(\Omega, \pi) = S_\Omega$ (Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [3]).*

   De même, $k = h \circ h$ est un déplacement d'angle $\pi + \pi = 2\pi$, et $2\pi = 0\ [2\pi]$: par le Théorème 21.9 (i) du cours 21 [4], k est une translation. Comme $k(\Omega) = \Omega$, son vecteur est le vecteur nul (Définition 20.2 du cours 20 [3]), et k est l'identité.

5 Composées de déplacements

Exercice 9 *Soient U le point d'affixe 1 et $f = r\left(U, -\frac{\pi}{6}\right) \circ r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$.*

1. *Montrer que f est une rotation, et donner une mesure de son angle.*
2. *Déterminer l'écriture complexe de f, puis l'affixe de son centre I.*
3. *Soit $g = r\left(U, -\frac{2\pi}{3}\right) \circ r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$. Montrer que g est une translation, dont on donnera le vecteur.*

Solution 9

1. *On a $\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$, et $\frac{\pi}{2} \neq 0\ [2\pi]$, car $\frac{1}{4}$ n'est pas entier. Par le Théorème 21.11 (i) du cours 21 [4], f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.*
2. *Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3], $r\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ envoie z sur $e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} z$, et $r\left(U, -\frac{\pi}{6}\right)$ envoie z sur $1 + e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}(z-1)$. Comme $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}} e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i}$ (Théorème 12.13 (i) du cours 12) et $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\boldsymbol{i}$ (Définition 12.5 du cours 12 [1]), f envoie z sur*

$$z' = 1 + e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}\left(e^{\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} z - 1\right) = \boldsymbol{i}z + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{i}.$$

Posons $b = \frac{2-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}}{2}$. On a $|\boldsymbol{i}| = 1$ et $\boldsymbol{i} \neq 1$: par le Théorème 21.13 du cours 21 [4], le centre I a pour affixe

$$\frac{b}{1-\boldsymbol{i}} = \frac{b(1+\boldsymbol{i})}{(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})} = \frac{\left(2-\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)(1+\boldsymbol{i})}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i}.$$

Contrôle : avec $\omega_I = \frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i}$, on a $\boldsymbol{i}\omega_I = -\frac{3-\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{i}$, et $\boldsymbol{i}\omega_I + b = \frac{-3+\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}+2}{4}\boldsymbol{i} = \omega_I$: I est invariant par f.
3. *On a $\frac{2\pi}{3} + \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 0$: par le Théorème 21.11 (i) et (ii) du cours 21 [4], avec $\omega = 0$, $\omega' = 1$ et $\theta' = -\frac{2\pi}{3}$, g est la translation de vecteur d'affixe*

$$\left(1 - e^{-\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}}\right)(1-0) = 1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i},$$

car $e^{-\boldsymbol{i}\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} - \boldsymbol{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$ (Définition 12.5 du cours 12 [1]). C'est le vecteur de coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 10 *Soient Ω le point d'affixe $\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{w}$ le vecteur d'affixe 2, $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right)$ et $g = r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ t_{\overrightarrow{w}}$.*

1. *Montrer que f et g sont des rotations d'angle $\frac{\pi}{6}$.*

2. *Montrer que* $\dfrac{1}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}$.

3. *Déterminer les affixes des centres* I *et* J *de* f *et de* g.

Solution 10

1. *On a* $\frac{\pi}{6}\neq 0\ [2\pi]$, *car* $\frac{1}{12}$ *n'est pas entier. Par le Théorème 21.12 du cours 21 [4],* $f=t_{\overrightarrow{w}}\circ r\left(\Omega,\frac{\pi}{6}\right)$ *et* $g=r\left(\Omega,\frac{\pi}{6}\right)\circ t_{\overrightarrow{w}}$ *sont des rotations d'angle* $\frac{\pi}{6}$.

2. *Par la Définition 12.5 du cours 12 [1],* $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\boldsymbol{i}$, *donc* $1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}=\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}}{2}$, *qui n'est pas nul. Par le Théorème 12.5 (i) du cours 12 [1], avec* $\left|\left(2-\sqrt{3}\right)-\boldsymbol{i}\right|^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+1=8-4\sqrt{3}=4\left(2-\sqrt{3}\right)$,

$$\frac{1}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\frac{2\left(\left(2-\sqrt{3}\right)+\boldsymbol{i}\right)}{4\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}\boldsymbol{i}=\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i},$$

car $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=4-3=1$.

3. *Par le Théorème 21.12 du cours 21 [4], avec* $\omega=\boldsymbol{i}$ *et* $c=2$, I *a pour affixe*

$$\omega+\frac{c}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\boldsymbol{i}+1+\left(2+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}=1+\left(3+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i},$$

et J *a pour affixe*

$$\omega+\frac{e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}c}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\omega+c\left(\frac{1}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}-1\right)=-1+\left(3+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i},$$

car $\frac{e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\frac{1-\left(1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}\right)}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}=\frac{1}{1-e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}}-1$.
Contrôle : par le Théorème 20.4 (i) et (ii) du cours 20 [3], f *envoie* z *sur* $\boldsymbol{i}+e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}(z-\boldsymbol{i})+2$. *Pour* $z=1+\left(3+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}$, $z-\boldsymbol{i}=1+\left(2+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}$, *et*

$$e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{6}}(z-\boldsymbol{i})=\frac{\left(\sqrt{3}+\boldsymbol{i}\right)\left(1+\left(2+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}\right)}{2}=-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i},$$

d'où l'image $\boldsymbol{i}-1+\left(2+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}+2=1+\left(3+\sqrt{3}\right)\boldsymbol{i}$ *: I est invariant par f.*

Exercice 11 *Soit $ABCD$ le carré dont les sommets ont pour affixes $a=0$, $b=2$, $c=2+2\boldsymbol{i}$ et $d=2\boldsymbol{i}$. Soient $f=r\left(C,\frac{\pi}{2}\right)\circ r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ et $g=r\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)\circ r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$.*

1. *Montrer que f est une rotation d'angle π.*

2. *Déterminer l'image de B par $r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$, puis par f. En déduire que $f=S_B$.*

3. *Montrer que g est une translation, et que son vecteur est $2\overrightarrow{AD}$.*

Solution 11

1. *On a* $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, *et* $\pi\neq 0\ [2\pi]$, *car* $\frac{1}{2}$ *n'est pas entier. Par le Théorème 21.11 (i) du cours 21 [4],* f *est une rotation d'angle* π.

2. *Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3],* $r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ *envoie* z *sur* $\boldsymbol{i}z$, *et* $r\left(C,\frac{\pi}{2}\right)$ *envoie* z *sur* $c+\boldsymbol{i}(z-c)$. *L'image de* B *par* $r\left(A,\frac{\pi}{2}\right)$ *a pour affixe* $2\boldsymbol{i}=d$ *: c'est* D. *Puis* D *a pour image le point d'affixe*

$$c+\boldsymbol{i}(d-c)=2+2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}(-2)=2=b.$$

Ainsi $f(B)=B$. *Par le Théorème 21.9 (ii) du cours 21 [4], le centre de la rotation* f *d'angle* π *est son unique point invariant : c'est* B. *Donc* $f=r(B,\pi)=S_B$ *(Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [3]).*

3. *On a* $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ *: par le Théorème 21.11 (i) et (ii) du cours 21 [4], avec* $\omega=a=0$, $\omega'=c$ *et* $\theta'=-\frac{\pi}{2}$, g *est la translation de vecteur d'affixe*

$$\left(1-e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\right)(c-a)=(1+\boldsymbol{i})(2+2\boldsymbol{i})=4\boldsymbol{i},$$

car $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}=-\boldsymbol{i}$. *Le vecteur* $\overrightarrow{AD}$ *a pour affixe* $d-a=2\boldsymbol{i}$ *(Théorème 12.7 (i) du cours 12) ; le vecteur de* g *a pour affixe* $4\boldsymbol{i}=2\times 2\boldsymbol{i}$ *: c'est* $2\overrightarrow{AD}$, *donc* $g(A)$ *a pour affixe* $a+2(d-a)=2d-a$, *et* D *est le milieu de* $[Ag(A)]$ *(Théorème 12.7 (i), (iii) du cours 12 [1]) :* $g(A)$ *est le symétrique de* A *par rapport à* D *(Définition 20.3 du cours 20 [3]).*

6 Écritures complexes

Exercice 12 *On donne quatre applications du plan par leurs écritures complexes :*

$$f_1: z'=z+3+4\boldsymbol{i}, \qquad f_2: z'=\boldsymbol{i}z+1+3\boldsymbol{i},$$
$$f_3: z'=-z+4-2\boldsymbol{i}, \qquad f_4: z'=(1+\boldsymbol{i})z.$$

Pour chacune, dire si c'est un déplacement ; si oui, en donner la nature et les éléments caractéristiques.

Solution 12 *Les trois premières écritures sont de la forme* $z'=az+b$, *avec* $a=1$, $a=\boldsymbol{i}$, $a=-1$, *de module* 1 *: par le Théorème 21.13 du cours 21 [4],* f_1, f_2, f_3 *sont des déplacements.*

- *Pour* f_1, $a=1$ *:* f_1 *est la translation de vecteur d'affixe* $3+4\boldsymbol{i}$, *c'est-à-dire de vecteur* $\overrightarrow{w}(3,4)$ *(Théorème 21.13 du cours 21 [4]).*
- *Pour* f_2, $a=\boldsymbol{i}=e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\neq 1$ *:* f_2 *est la rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$, *de centre le point* Ω *d'affixe*

$$\frac{1+3\boldsymbol{i}}{1-\boldsymbol{i}}=\frac{(1+3\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}{(1-\boldsymbol{i})(1+\boldsymbol{i})}=\frac{-2+4\boldsymbol{i}}{2}=-1+2\boldsymbol{i}$$

(Théorème 21.13 du cours 21 [4]). Contrôle : $\boldsymbol{i}(-1+2\boldsymbol{i})+1+3\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}-2+1+3\boldsymbol{i}=-1+2\boldsymbol{i}$.

- *Pour f_3, $a = -1 = e^{i\pi} \neq 1$: f_3 est la rotation d'angle π, de centre le point J d'affixe $\frac{4-2i}{1-(-1)} = 2 - i$ (Théorème 21.13 du cours 21 [4]), c'est-à-dire la symétrie centrale S_J, avec $J(2,-1)$ (Théorème 20.4 (iii) du cours 20 [3]).*
- *L'application f_4 envoie O sur O et le point U d'affixe 1 sur le point U' d'affixe $1+i$. Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], $OU = 1$ et $OU' = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1$: f_4 ne conserve pas les distances, ce n'est pas une isométrie (Définition 20.6 du cours 20 [3]), donc pas un déplacement (Définition 21.1 du cours 21 [4]). Ici $|a| = \sqrt{2} \neq 1$.*

Exercice 13 *Soient A, B, C, D les points d'affixes $a = 0$, $b = 5$, $c = 1$ et $d = 4 + 4i$.*

1. *Montrer que $AB = CD$.*
2. *Déterminer l'écriture complexe du déplacement f qui transforme A en C et B en D. Préciser sa nature et ses éléments caractéristiques.*
3. *Déterminer l'écriture complexe de l'antidéplacement g qui transforme A en C et B en D. Montrer que g est une symétrie glissante, dont on donnera le vecteur et l'axe.*

Solution 13

1. *Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], $AB = |5| = 5$ et $CD = |3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$. Ainsi $AB = CD \neq 0$: par le Théorème 21.7 du cours 21 [4], il existe un déplacement et un seul, et un antidéplacement et un seul, qui transforment A en C et B en D.*
2. *Par le Théorème 21.13 du cours 21 [4], f a une écriture complexe $z' = \alpha z + \beta$, avec $|\alpha| = 1$. Les conditions $f(A) = C$ et $f(B) = D$ s'écrivent $\beta = 1$ et $5\alpha + 1 = 4 + 4i$, d'où $\alpha = \frac{3+4i}{5}$. Donc*

$$f : z \mapsto z' = \frac{3+4i}{5} z + 1.$$

On a bien $|\alpha| = \frac{\sqrt{9+16}}{5} = 1$. Comme $\alpha \neq 1$, f est une rotation (Théorème 21.13 du cours 21 [4]), de centre le point Ω d'affixe

$$\frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{1}{\frac{2-4i}{5}} = \frac{5(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{5(2+4i)}{20} = \frac{1}{2} + i\,;$$

une mesure θ de son angle est un argument de α, c'est-à-dire un réel tel que $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5}$ (Théorème 12.10 (i) du cours 12 [1]).

3. *Par le Théorème 21.14 du cours 21 [4], g a une écriture complexe $z' = \alpha' \bar{z} + \beta'$, avec $|\alpha'| = 1$. Les conditions $g(A) = C$ et $g(B) = D$ s'écrivent $\beta' = 1$ et $5\alpha' + 1 = 4 + 4i$, car $\bar{0} = 0$ et $\bar{5} = 5$: $\alpha' = \frac{3+4i}{5}$, de module 1. Donc*

$$g : z \mapsto z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + 1.$$

On a $\alpha'\overline{\beta'}+\beta'=\frac{3+4\boldsymbol{i}}{5}+1=\frac{8+4\boldsymbol{i}}{5}\neq 0$ *: par le Théorème 21.16 (iii) du cours 21 [4], g est une symétrie glissante, de vecteur* $\overrightarrow{w}$ *d'affixe* $\frac{1}{2}\times\frac{8+4\boldsymbol{i}}{5}=\frac{4+2\boldsymbol{i}}{5}$.

Par le Théorème 21.15 du cours 21 [4], l'axe Δ *de g passe par le milieu K de* $[AC]$*, car* $C=g(A)$*, et a pour vecteur directeur* $\overrightarrow{w}$*. Le point K a pour affixe* $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ *(Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [1]), et* $\overrightarrow{w}$ *a pour coordonnées* $\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$*. Par la Définition 14.6 (i) du cours 14 [2],* $M(x,y)\in\Delta$ *si et seulement s'il existe un réel t tel que* $x-\frac{1}{2}=\frac{4}{5}t$ *et* $y=\frac{2}{5}t$*, c'est-à-dire* $t=\frac{5}{2}y$ *et* $x-\frac{1}{2}=2y$*. L'axe* Δ *est la droite d'équation* $x-2y-\frac{1}{2}=0$*, soit* $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

7 Antidéplacements et forme réduite

Exercice 14 *Soit f l'application du plan d'écriture complexe* $z'=-\boldsymbol{i}\bar{z}+2$.

1. *Montrer que f est un antidéplacement.*
2. *Déterminer l'écriture complexe de* $f\circ f$*. En déduire que f est une symétrie glissante, dont on donnera le vecteur* $\overrightarrow{w}$.
3. *Soient* $O'=f(O)$ *et* $O''=f(O')$*. Calculer leurs affixes ; en déduire l'axe* Δ *de f.*
4. *Montrer que* $f=t_{\overrightarrow{w}}\circ S_{\Delta}$*, et que c'est la forme réduite de f.*
5. *La droite* (OO') *est-elle l'axe de f ? Le vecteur* $\overrightarrow{OO'}$ *est-il égal à* $\overrightarrow{w}$ *? Calculer* $\overrightarrow{PP'}$*, où P est le point d'affixe* 1 *et* $P'=f(P)$.

Solution 14

1. *L'écriture est de la forme* $z'=a\bar{z}+b$*, avec* $a=-\boldsymbol{i}$*,* $b=2$ *et* $|-\boldsymbol{i}|=1$ *: par le Théorème 21.14 du cours 21 [4], f est un antidéplacement.*
2. *La composée* $f\circ f$ *envoie z sur* $-\boldsymbol{i}\,\overline{(-\boldsymbol{i}\bar{z}+2)}+2=-\boldsymbol{i}\,(\boldsymbol{i}z+2)+2=z+2-2\boldsymbol{i}$ *(Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]) : c'est la translation de vecteur d'affixe* $2-2\boldsymbol{i}=a\bar{b}+b$ *(Théorème 20.4 (i) du cours 20 [3]). Comme* $a\bar{b}+b\neq 0$*, le Théorème 21.16 (iii) du cours 21 [4] montre que f n'est pas une symétrie orthogonale : c'est une symétrie glissante, de vecteur* $\overrightarrow{w}$ *d'affixe* $\frac{1}{2}(2-2\boldsymbol{i})=1-\boldsymbol{i}$*, de coordonnées* $(1,-1)$.
3. *On a* $f(0)=2$ *et* $f(2)=-2\boldsymbol{i}+2$ *:* O' *a pour affixe* 2 *et* O'' *pour affixe* $2-2\boldsymbol{i}$*. Par le Théorème 21.15 du cours 21 [4],* $\overrightarrow{w}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OO''}$*, d'affixe* $1-\boldsymbol{i}$*, et* Δ *passe par le milieu K de* $[OO']$*, d'affixe* 1 *(Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [1]), avec le vecteur directeur* $\overrightarrow{w}$*. Par la Définition 14.6 (i) du cours 14 [2],* $M(x,y)\in\Delta$ *si et seulement s'il existe un réel t tel que* $x-1=t$ *et* $y=-t$*, c'est-à-dire* $y=-(x-1)$ *:* Δ *est la droite d'équation* $y=-x+1$.

4. *Le vecteur* $\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{w}$ *dirige aussi* Δ *(Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]) ; son affixe est* $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} = e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$ *(Définition 12.5 du cours 12 [1]). Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3], avec* $\omega = 1$, $2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = -\boldsymbol{i}$, S_Δ *envoie* z *sur* $1 - \boldsymbol{i}\,\overline{(z-1)} = -\boldsymbol{i}\bar{z} + 1 + \boldsymbol{i}$. *Puis* $t_{\overrightarrow{w}}$ *envoie ce point sur le point d'affixe* $-\boldsymbol{i}\bar{z} + 1 + \boldsymbol{i} + 1 - \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}\bar{z} + 2$ *(Théorème 20.4 (i) du cours 20 [3]). Ainsi* $f = t_{\overrightarrow{w}} \circ S_\Delta$. *Comme* $\overrightarrow{w}$ *est non nul et dirige* Δ, *c'est la forme réduite de* f *(Définition 21.3 du cours 21 [4]), d'éléments caractéristiques l'axe* Δ *et le vecteur* $\overrightarrow{w}\,(1, -1)$.

5. *La droite* (OO') *est l'axe réel ; elle passe par* O, *qui n'est pas sur* Δ, *car* $-0+1 = 1 \neq 0$ *: ce n'est pas l'axe de* f. *Le vecteur* $\overrightarrow{OO'}$ *a pour affixe* 2, *et* $2 \neq 1 - \boldsymbol{i}$ *: il n'est pas égal à* $\overrightarrow{w}$. *Le point* P *est sur* Δ, *car* $-1+1 = 0$ *; son image* P' *a pour affixe* $f(1) = 2 - \boldsymbol{i}$, *et* $\overrightarrow{PP'}$ *a pour affixe* $(2 - \boldsymbol{i}) - 1 = 1 - \boldsymbol{i}$ *:* $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{w}$. *Pour un point* M *de l'axe,* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$ *(Théorème 21.15 (ii) du cours 21) ; pour un point* M *quelconque, comme* O, *on sait seulement que le milieu de* $[MM']$ *est sur l'axe (Théorème 21.15 (i) du cours 21 [4]). La droite* (MM') *et le vecteur* $\overrightarrow{MM'}$ *ne donnent donc pas, en général, l'axe et le vecteur.*

Exercice 15 *Soit* f *l'application du plan d'écriture complexe* $z' = -\boldsymbol{i}\bar{z} + 3 + 3\boldsymbol{i}$.

1. *Montrer que* f *est un antidéplacement, et calculer* $f \circ f$.

2. *En déduire que* f *est une symétrie orthogonale, et déterminer son axe.*

Solution 15

1. *On a* $a = -\boldsymbol{i}$, *de module* 1, *et* $b = 3 + 3\boldsymbol{i}$ *: par le Théorème 21.14 du cours 21 [4],* f *est un antidéplacement, et* $f \circ f$ *est la translation de vecteur d'affixe* $a\bar{b} + b = -\boldsymbol{i}\,(3 - 3\boldsymbol{i}) + 3 + 3\boldsymbol{i} = -3\boldsymbol{i} - 3 + 3 + 3\boldsymbol{i} = 0$. *Ainsi* $f \circ f = t_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}$.

2. *Par le Théorème 21.16 (i) du cours 21 [4], l'antidéplacement* f, *qui vérifie* $f \circ f = \mathrm{Id}$, *est une symétrie orthogonale, d'axe l'ensemble de ses points invariants. Avec* $z = x + \boldsymbol{i}y$, $-\boldsymbol{i}\bar{z} = -\boldsymbol{i}\,(x - \boldsymbol{i}y) = -y - \boldsymbol{i}x$, *et* M *est invariant si et seulement si*

$$x + \boldsymbol{i}y = (3 - y) + \boldsymbol{i}\,(3 - x)\,,$$

c'est-à-dire $x = 3 - y$ *et* $y = 3 - x$, *deux conditions qui s'écrivent toutes deux* $x + y = 3$. *L'axe de* f *est la droite d'équation* $x + y = 3$.

Contrôle : $f(O)$ *a pour affixe* $3 + 3\boldsymbol{i}$, *et le milieu de* $[Of(O)]$, *de coordonnées* $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, *vérifie* $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ *: il est sur l'axe.*

Exercice 16 *Soient* $\mathcal{D}_1$ *l'axe réel,* $\mathcal{D}_2$ *l'axe des ordonnées,* $\mathcal{D}_3$ *la droite d'équation* $y = 1$, *et* $f = S_{\mathcal{D}_3} \circ S_{\mathcal{D}_2} \circ S_{\mathcal{D}_1}$.

1. *Déterminer les écritures complexes de $S_{\mathcal{D}_1}$, $S_{\mathcal{D}_2}$, $S_{\mathcal{D}_3}$, puis celle de f.*

2. *Montrer que f est une symétrie glissante, et déterminer sa forme réduite.*

Solution 16

1. *Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ passent par les points d'affixes 0, 0, $\boldsymbol{i}$, et ont pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}$, d'affixes $e^{\boldsymbol{i}0}$, $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$, $e^{\boldsymbol{i}0}$. Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3], avec $e^{2\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = e^{\boldsymbol{i}\pi} = -1$, $S_{\mathcal{D}_1}$, $S_{\mathcal{D}_2}$ et $S_{\mathcal{D}_3}$ envoient z respectivement sur*

$$\bar{z}, \qquad -\bar{z}, \qquad \boldsymbol{i} + \overline{(z - \boldsymbol{i})} = \bar{z} + 2\boldsymbol{i}.$$

La composée f applique d'abord $S_{\mathcal{D}_1}$, puis $S_{\mathcal{D}_2}$, puis $S_{\mathcal{D}_3}$: elle envoie z sur $\bar{z}$, puis sur $-\bar{\bar{z}} = -z$, puis sur $\overline{-z} + 2\boldsymbol{i} = -\bar{z} + 2\boldsymbol{i}$ (Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1]). Ainsi

$$f : z \mapsto z' = -\bar{z} + 2\boldsymbol{i}.$$

2. *Par le Corollaire 21.1 du cours 21 [4], f, composée de trois symétries orthogonales, est un antidéplacement ; son écriture est $z' = a\bar{z} + b$, avec $a = -1$, de module 1, et $b = 2\boldsymbol{i}$. On a $a\bar{b} + b = -(-2\boldsymbol{i}) + 2\boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i} \neq 0$: par le Théorème 21.16 (iii) du cours 21 [4], f est une symétrie glissante, de vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $2\boldsymbol{i}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{v}$.*

L'image de O a pour affixe $2\boldsymbol{i}$; le milieu de $[Of(O)]$ a pour affixe $\boldsymbol{i}$ (Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [1]). Par le Théorème 21.15 du cours 21 [4], l'axe passe par ce point et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}$, colinéaire à $\overrightarrow{v}$: comme ce point appartient à l'axe des ordonnées $\mathcal{D}_2$, de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$, c'est $\mathcal{D}_2$ (Définition 14.6 (ii) et Théorème 14.5 (i) du cours 14 [2]). La forme réduite de f est donc $f = t_{2\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{D}_2} = S_{\mathcal{D}_2} \circ t_{2\overrightarrow{v}}$ (Définition 21.3 du cours 21 [4]) ; en effet, $t_{2\overrightarrow{v}} \circ S_{\mathcal{D}_2}$ envoie z sur $-\bar{z} + 2\boldsymbol{i}$ (Théorème 20.4 (i) du cours 20 [3]).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 21. Déplacements et antidéplacements, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.