Exercices type Bac & Solutions : Similitudes

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Dans les énoncés et les solutions, un renvoi comme *Théorème 22.13 du cours 22* désigne un énoncé numéroté du cours 22 [4], sur les similitudes ; un renvoi comme *Théorème 20.4 du cours 20* désigne un énoncé numéroté du cours 20 [3], sur les isométries du plan ; de même pour le cours 12 [1], sur les nombres complexes, et le cours 14 [2], sur les vecteurs et la géométrie. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`. Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$; un point $M(x, y)$ a pour affixe $z = x + \boldsymbol{i}y$, et son image M' par une application du plan a pour affixe z' ; de même, $A' = f(A)$ a pour affixe a' (Définition 12.4 du cours 12 [1]). Dans une écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\bar{z} + b$, les lettres a et b désignent des coefficients, et l'affixe d'un point A est alors notée z_A. Les angles sont mesurés en radians. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ sont les arguments de $\frac{d-c}{b-a}$ (Théorème 12.15 du cours 12 [1]) ; l'égalité modulo 2π s'écrit $\theta = \theta' \ [2\pi]$. Dans $g \circ f$, on applique d'abord f, puis g (Définition 20.1 du cours 20 [3]).

Table des matières

1 Homothéties **2**

2 Similitudes **4**

3 Similitudes directes et indirectes **6**

4 Écritures complexes **7**

5 Deux points et leurs images **8**

6 Similitudes directes **10**

7 Similitudes indirectes **13**

1 Homothéties

Exercice 1 *Soient Ω le point d'affixe $\omega = 1 + \boldsymbol{i}$, $h = h(\Omega, -2)$, et A, B les points de coordonnées $(3, 2)$ et $(5, -1)$.*

1. *Déterminer les coordonnées de l'image A' de A par h.*
2. *Déterminer l'écriture complexe de h.*
3. *Soit φ l'application d'écriture complexe $z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3+3\boldsymbol{i}}{2}$. Montrer que φ est une homothétie, dont on donnera le centre et le rapport. En déduire que $\varphi = h^{-1}$.*
4. *Déterminer le point N tel que $h(N) = B$.*

Solution 1

1. *Le point A a pour affixe $3 + 2\boldsymbol{i}$. Par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], avec $k = -2$, A' a pour affixe*

$$\omega - 2((3 + 2\boldsymbol{i}) - \omega) = 1 + \boldsymbol{i} - 2(2 + \boldsymbol{i}) = -3 - \boldsymbol{i}.$$

   Ainsi $A'(-3, -1)$.

2. *Par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], $M' = h(M)$ si et seulement si $z' = \omega - 2(z - \omega) = -2z + 3\omega$. L'écriture complexe de h est donc $z' = -2z + 3 + 3\boldsymbol{i}$.*

3. *Le coefficient $-\frac{1}{2}$ est un réel différent de 0 et de 1 : par le Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4], φ est l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre le point d'affixe*

$$\frac{\frac{3+3\boldsymbol{i}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3 + 3\boldsymbol{i}}{2} \times \frac{2}{3} = 1 + \boldsymbol{i} = \omega.$$

   Ainsi $\varphi = h\left(\Omega, -\frac{1}{2}\right)$. Comme $-\frac{1}{2} = \frac{1}{-2}$, le Théorème 22.2 (iv) du cours 22 [4] donne $\varphi = h^{-1}$.

4. *Par le Théorème 22.2 (iv) du cours 22 [4], h est une bijection : il existe un point N et un seul tel que $h(N) = B$, et c'est $h^{-1}(B) = \varphi(B)$. Le point B a pour affixe $5 - \boldsymbol{i}$, et N a pour affixe*

$$-\frac{1}{2}(5 - \boldsymbol{i}) + \frac{3 + 3\boldsymbol{i}}{2} = \frac{-2 + 4\boldsymbol{i}}{2} = -1 + 2\boldsymbol{i}.$$

   Ainsi $N(-1, 2)$. Contrôle par la question 2 : $-2(-1 + 2\boldsymbol{i}) + 3 + 3\boldsymbol{i} = 5 - \boldsymbol{i}$.

Exercice 2 *Soient I et I' deux points, $h = h(I, 3)$ et $h' = h\left(I', \frac{1}{2}\right)$.*

1. *Déterminer la nature de $h' \circ h$. Montrer que son centre J vérifie $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{I'I}$, et que I est le milieu de $[I'J]$.*

2. *Dans cette question et la suivante, I et I' ont pour affixes 1 et $1+2\boldsymbol{i}$. Déterminer les écritures complexes de h, h', $h'\circ h$ et $h\circ h'$, puis les centres de $h'\circ h$ et de $h\circ h'$. Les applications $h'\circ h$ et $h\circ h'$ sont-elles égales ?*

3. *Soit $h''=h\left(I',\frac{1}{3}\right)$. Déterminer la nature et les éléments de $h''\circ h$.*

Solution 2

1. *On a $kk'=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq 1$: par le Théorème 22.3 (ii) du cours 22 [4], $h'\circ h$ est l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ et de centre le point J tel que*

$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1-\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{2}}\overrightarrow{II'}=-\overrightarrow{II'}=\overrightarrow{I'I}$$

(Théorème 14.3 (i) du cours 14 [2]). L'égalité $\overrightarrow{I'I}=\overrightarrow{IJ}$ dit que I est le milieu de $[I'J]$ (Théorème 14.3 (iii) du cours 14 [2]).

2. *Par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], h envoie z sur $1+3\left(z-1\right)=3z-2$, et h' envoie z sur $1+2\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\left(z-1-2\boldsymbol{i}\right)=\frac{1}{2}z+\frac{1+2\boldsymbol{i}}{2}$. La composée $h'\circ h$ applique d'abord h : elle envoie z sur*

$$\frac{1}{2}\left(3z-2\right)+\frac{1+2\boldsymbol{i}}{2}=\frac{3}{2}z+\frac{-1+2\boldsymbol{i}}{2},$$

et $h\circ h'$ envoie z sur

$$3\left(\frac{1}{2}z+\frac{1+2\boldsymbol{i}}{2}\right)-2=\frac{3}{2}z+\frac{-1+6\boldsymbol{i}}{2}.$$

Le coefficient $\frac{3}{2}$ est un réel différent de 0 et de 1 : par le Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4], ces deux applications sont des homothéties de rapport $\frac{3}{2}$, de centres les points d'affixes

$$\frac{-1+2\boldsymbol{i}}{2}\times\frac{1}{1-\frac{3}{2}}=1-2\boldsymbol{i}\qquad\text{et}\qquad\frac{-1+6\boldsymbol{i}}{2}\times\frac{1}{1-\frac{3}{2}}=1-6\boldsymbol{i}.$$

Contrôle par la question 1 : I est le milieu de $[I'J]$, donc $2\times 1=(1+2\boldsymbol{i})+z_J$ (Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [1]), et $z_J=2-(1+2\boldsymbol{i})=1-2\boldsymbol{i}$.

Les deux composées n'ont pas le même centre, c'est-à-dire pas le même point invariant (Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4]) : $h'\circ h\neq h\circ h'$. C'est ce qu'annonce le Théorème 22.3 (iv) du cours 22 [4], car $3\neq 1$, $\frac{1}{2}\neq 1$ et $I\neq I'$.

3. *Ici $3\times\frac{1}{3}=1$: par le Théorème 22.3 (iii) du cours 22 [4], $h''\circ h$ est la translation de vecteur $\left(1-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{II'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{II'}$, d'affixe $\frac{2}{3}\times 2\boldsymbol{i}=\frac{4}{3}\boldsymbol{i}$ (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [1]).*

Contrôle par les écritures complexes : h'' envoie z sur $1+2\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\left(z-1-2\boldsymbol{i}\right)=\frac{1}{3}z+\frac{2+4\boldsymbol{i}}{3}$ (Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4]), donc $h''\circ h$ envoie z sur $\frac{1}{3}\left(3z-2\right)+\frac{2+4\boldsymbol{i}}{3}=z+\frac{4}{3}\boldsymbol{i}$.

2 Similitudes

Exercice 3 *Soient M, N, P, M', N', P' les points de coordonnées $(1,0)$, $(3,1)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(0,5)$, $(3,3)$.*

1. *Soit f une similitude qui transforme M en M' et N en N'. Calculer le rapport de f.*
2. *Montrer qu'aucune similitude ne transforme M en M', N en N' et P en P'.*
3. *Pourquoi l'énoncé de la question 1 dit-il "une similitude", et non "la similitude" ?*

Solution 3

1. *Les points M, N, M', N' ont pour affixes 1, $3+\boldsymbol{i}$, $1+2\boldsymbol{i}$, $5\boldsymbol{i}$. Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1],*

$$MN = |2+\boldsymbol{i}| = \sqrt{5} \qquad \text{et} \qquad M'N' = |-1+3\boldsymbol{i}| = \sqrt{10}.$$

Comme $M \neq N$, la Remarque 22.2 du cours 22 [4] donne le rapport de f :

$$k = \frac{M'N'}{MN} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

2. *Les points P et P' ont pour affixes $\boldsymbol{i}$ et $3+3\boldsymbol{i}$: $MP = |-1+\boldsymbol{i}| = \sqrt{2}$ et $M'P' = |2+\boldsymbol{i}| = \sqrt{5}$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1]). Supposons qu'une similitude g, de rapport k', transforme M en M', N en N' et P en P'. Comme à la question 1, $k' = \frac{M'N'}{MN} = \sqrt{2}$ (Remarque 22.2 du cours 22) ; par la Définition 22.2 du cours 22 [4], $M'P' = k'MP$, c'est-à-dire $\sqrt{5} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, d'où $5 = 4$, ce qui est impossible. Aucune similitude ne transforme donc M, N, P en M', N', P'.*
3. *On a $M \neq N$ et $M' \neq N'$: par le Théorème 22.13 du cours 22, il existe une similitude directe et une similitude indirecte qui transforment M en M' et N en N', et elles sont distinctes, car une similitude n'est pas à la fois directe et indirecte (Théorème 22.9 (ii) du cours 22 [4]). Il y a donc deux telles similitudes, toutes deux de rapport $\sqrt{2}$, et il n'y en a pas d'autre : une similitude est directe ou indirecte (Théorème 22.9 (ii) du cours 22), et dans chaque cas elle est unique par le Théorème 22.13 du cours 22 [4]. C'est pourquoi l'énoncé dit "une similitude".*

Exercice 4 *Soient f l'application d'écriture complexe $z' = 2\boldsymbol{i}z + 1 - \boldsymbol{i}$, Δ la droite d'équation $y = x+1$, et Γ le cercle de centre $I\,(1,0)$ et de rayon 1.*

1. *Montrer que f est une similitude, et donner son rapport.*
2. *Déterminer une équation de l'image $f\,(\Delta)$ de la droite Δ.*

3. *Déterminer une équation de l'image $f(\Gamma)$ du cercle Γ.*

Solution 4

1. *Le coefficient $2\boldsymbol{i}$ est non nul : par le Théorème 22.11 du cours 22 [4], f est une similitude directe de rapport $|2\boldsymbol{i}| = 2$.*

2. *Les points $A(0,1)$ et $B(1,2)$ sont distincts et vérifient $y = x+1$: la droite Δ, ensemble d'équation $x - y + 1 = 0$ (Théorème 14.13 du cours 14, avec $(1,-1) \neq (0,0)$), est la droite (AB) (Théorème 14.5 (ii) du cours 14 [2]). Par le Corollaire 22.1 (iii) du cours 22 [4], $f(\Delta)$ est la droite $(A'B')$. Les affixes de A' et B' sont*

$$2\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + 1 - \boldsymbol{i} = -1 - \boldsymbol{i} \qquad \text{et} \qquad 2\boldsymbol{i}(1 + 2\boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = -3 + \boldsymbol{i}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ a pour affixe $-2 + 2\boldsymbol{i}$, donc pour coordonnées $(-2, 2)$, et $\overrightarrow{A'M}$ a pour coordonnées $(x+1, y+1)$ (Théorème 12.7 (i) du cours 12 [1]). Par le Théorème 14.5 (ii) et la Définition 14.6 (i) du cours 14 [2], $M(x,y)$ appartient à $(A'B')$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $x+1 = -2t$ et $y+1 = 2t$. Si c'est le cas, $x+1 = -(y+1)$; réciproquement, si $x+1 = -(y+1)$, le réel $t = \frac{y+1}{2}$ convient. Ainsi $f(\Delta)$ a pour équation $x + 1 = -(y+1)$, c'est-à-dire $y = -x - 2$. Contrôle : $B'(-3,1)$ vérifie $1 = 3 - 2$.

3. *Par le Corollaire 22.1 (vi) du cours 22 [4], $f(\Gamma)$ est le cercle de centre I' et de rayon $2 \times 1 = 2$. Le point I' a pour affixe $2\boldsymbol{i} \times 1 + 1 - \boldsymbol{i} = 1 + \boldsymbol{i}$. Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], $M(x,y)$ appartient à $f(\Gamma)$ si et seulement si $|z - (1 + \boldsymbol{i})| = 2$, c'est-à-dire, en élevant au carré ces nombres positifs, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Une équation de $f(\Gamma)$ est donc $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$.*

Exercice 5

1. *Soit f l'application d'écriture complexe $z' = 2z + \bar{z}$. Déterminer les images des points O, $U(1,0)$ et $V(0,1)$. En déduire que f n'est pas une similitude.*

2. *Soit g l'application d'écriture complexe $z' = z^2$. Montrer que g n'est pas une similitude.*

Solution 5

1. *Avec $z = x + \boldsymbol{i}y$, on a $2z + \bar{z} = 2x + 2\boldsymbol{i}y + x - \boldsymbol{i}y = 3x + \boldsymbol{i}y$. Les points O, U, V, d'affixes 0, 1, $\boldsymbol{i}$, ont pour images les points $O' = O$, U' et V', d'affixes 0, 3 et $\boldsymbol{i}$. Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1],*

$$OU = 1, \quad O'U' = 3, \quad OV = 1, \quad O'V' = 1.$$

Si f était une similitude de rapport k, on aurait $O'U' = k\,OU$ et $O'V' = k\,OV$ (Définition 22.2 du cours 22 [4]), c'est-à-dire $k = 3$ et $k = 1$, ce qui est impossible. Donc f n'est pas une similitude : elle multiplie certaines distances par 3, d'autres par 1.

2. *Les points O, U et $W\,(2,0)$, d'affixes 0, 1, 2, ont pour images les points d'affixes 0, 1, 4 : $O'=O$, $U'=U$, et W' d'affixe 4. On a $OU=1=O'U'$, $OW=2$ et $O'W'=4$ (Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1]). Si g était une similitude de rapport k, on aurait $1=k\times 1$ et $4=k\times 2$ (Définition 22.2 du cours 22 [4]), c'est-à-dire $k=1$ et $k=2$, ce qui est impossible. Donc g n'est pas une similitude.*

3 Similitudes directes et indirectes

Exercice 6

1. *Soient f une similitude directe et g une similitude indirecte. Les composées $g\circ f$ et $f\circ g$ sont-elles des similitudes directes ou indirectes ?*

2. *Même question lorsque f et g sont deux similitudes indirectes.*

3. *Dans cette question, f et g ont pour écritures complexes $z'=(1-\boldsymbol{i})\,z+2$ et $z'=3\bar{z}+\boldsymbol{i}$.*

   (a) *Montrer que f est une similitude directe et g une similitude indirecte, et donner leurs rapports.*

   (b) *Déterminer les écritures complexes de $g\circ f$, $f\circ g$ et $g\circ g$. En déduire la nature et le rapport de ces trois similitudes, et comparer avec les questions 1 et 2.*

Solution 6

1. *Par le Théorème 22.10 (ii) du cours 22 [4], valable dans les deux ordres, $g\circ f$ et $f\circ g$ sont des similitudes indirectes. Elles ne sont donc pas directes (Théorème 22.9 (ii) du cours 22 [4]).*

2. *Par le Théorème 22.10 (i) du cours 22 [4], $g\circ f$ et $f\circ g$ sont des similitudes directes.*

3. (a) *Le coefficient $1-\boldsymbol{i}$ est non nul : par le Théorème 22.11 du cours 22 [4], f est une similitude directe de rapport $|1-\boldsymbol{i}|=\sqrt{2}$. Le coefficient 3 est non nul : par le Théorème 22.12 du cours 22 [4], g est une similitude indirecte de rapport 3.*

   (b) *La composée $g\circ f$ applique d'abord f : par le Théorème 12.4 (i) du cours 12 [1], elle envoie z sur*

$$3\,\overline{(1-\boldsymbol{i})\,z+2}+\boldsymbol{i}=3\,(1+\boldsymbol{i})\,\bar{z}+6+\boldsymbol{i}.$$

   De même, $f\circ g$ envoie z sur $(1-\boldsymbol{i})\,(3\bar{z}+\boldsymbol{i})+2=(3-3\boldsymbol{i})\,\bar{z}+3+\boldsymbol{i}$, et $g\circ g$ envoie z sur $3\,\overline{3\bar{z}+\boldsymbol{i}}+\boldsymbol{i}=9z-3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{i}=9z-2\boldsymbol{i}$.
   Les coefficients $3+3\boldsymbol{i}$ et $3-3\boldsymbol{i}$ sont non nuls : par le Théorème 22.12 du cours 22 [4], $g\circ f$ et $f\circ g$ sont des similitudes indirectes, de rapport

$|3+3\boldsymbol{i}| = |3-3\boldsymbol{i}| = 3\sqrt{2}$, *comme à la question 1. Le coefficient* 9 *est non nul : par le Théorème 22.11 du cours 22 [4],* $g \circ g$ *est une similitude directe de rapport* 9*, comme à la question 2. Les rapports* $3\sqrt{2} = \sqrt{2} \times 3$ *et* $9 = 3 \times 3$ *sont ceux que donne le Théorème 22.4 (ii) du cours 22 [4]. Comme* 9 *est un réel différent de* 0 *et de* 1*,* $g \circ g$ *est même l'homothétie de rapport* 9 *et de centre le point d'affixe* $\frac{-2\boldsymbol{i}}{1-9} = \frac{1}{4}\boldsymbol{i}$ *(Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4]).*

4 Écritures complexes

Exercice 7 *On donne cinq applications du plan par leurs écritures complexes :*

$$f_1 : z' = (-1+\boldsymbol{i})\,z + 3 - 4\boldsymbol{i}, \qquad f_2 : z' = -3\boldsymbol{i}\bar{z} + 1, \qquad f_3 : z' = -\frac{1}{2}z + 3,$$

$$f_4 : z' = z + 2 - \boldsymbol{i}, \qquad f_5 : z' = 1 + \boldsymbol{i}.$$

Pour chacune, dire si c'est une similitude ; si oui, dire si elle est directe ou indirecte et donner son rapport, et, pour une similitude directe, une mesure de son angle et, s'il existe, son centre.

Solution 7

- *Pour* f_1*, le coefficient* $a = -1+\boldsymbol{i}$ *est non nul :* f_1 *est une similitude directe de rapport* $|-1+\boldsymbol{i}| = \sqrt{2}$ *(Théorème 22.11 du cours 22 [4]). Comme* $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$*,*

$$-1+\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{2}\,e^{\boldsymbol{i}\frac{3\pi}{4}}$$

(Définition 12.5 du cours 12) : $\frac{3\pi}{4}$ *est une mesure de l'angle de* f_1 *(Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [4] et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1]). Comme* $a \neq 1$*,* f_1 *a pour centre le point* Ω_1 *d'affixe*

$$\frac{3-4\boldsymbol{i}}{1-(-1+\boldsymbol{i})} = \frac{3-4\boldsymbol{i}}{2-\boldsymbol{i}} = \frac{(3-4\boldsymbol{i})\,(2+\boldsymbol{i})}{(2-\boldsymbol{i})\,(2+\boldsymbol{i})} = \frac{10-5\boldsymbol{i}}{5} = 2-\boldsymbol{i}$$

(Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]). Contrôle : $(-1+\boldsymbol{i})\,(2-\boldsymbol{i}) + 3 - 4\boldsymbol{i} = (-1+3\boldsymbol{i}) + 3 - 4\boldsymbol{i} = 2-\boldsymbol{i}$*.*

- *Pour* f_2*, le coefficient* $-3\boldsymbol{i}$ *est non nul :* f_2 *est une similitude indirecte de rapport* $|-3\boldsymbol{i}| = 3$ *(Théorème 22.12 du cours 22 [4]). L'angle n'est défini que pour une similitude directe (Définition 22.4 du cours 22 [4]) :* f_2 *n'en a pas.*

- *Pour* f_3*, le coefficient* $-\frac{1}{2}$ *est non nul :* f_3 *est une similitude directe de rapport* $\frac{1}{2}$ *(Théorème 22.11 du cours 22 [4]). Comme* $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}e^{\boldsymbol{i}\pi}$*,* π *est une mesure de son angle (Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [4] et*

Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1]). Comme $-\frac{1}{2} \neq 1$, *son centre a pour affixe* $\frac{3}{1+\frac{1}{2}} = 2$ *(Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]). Le coefficient étant un réel différent de* 0 *et de* 1, f_3 *est l'homothétie de rapport* $-\frac{1}{2}$ *et de centre le point* $\Omega_3\,(2,0)$ *(Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4]).*

- *Pour* f_4, *le coefficient* 1 *est non nul :* f_4 *est une similitude directe de rapport* 1, *et* 0 *est une mesure de son angle, car* $1 = 1 \times e^{\boldsymbol{i}0}$ *(Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [4] et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1]). Par le Théorème 22.16 (i) du cours 22 [4], c'est la translation de vecteur d'affixe* $2 - \boldsymbol{i}$, *c'est-à-dire de vecteur* $\overrightarrow{w}\,(2,-1)$. *Elle n'a pas de centre au sens de la Définition 22.5 du cours 22 [4], qui suppose* $a \neq 1$ *; elle n'a d'ailleurs aucun point invariant : un point invariant vérifierait* $z = z + 2 - \boldsymbol{i}$, *soit* $2 - \boldsymbol{i} = 0$, *ce qui est faux.*

- *L'application* f_5 *envoie* O *et le point* U *d'affixe* 1 *sur le même point* $O' = U'$, *d'affixe* $1+\boldsymbol{i}$. *Si* f_5 *était une similitude de rapport* $k > 0$, *on aurait* $0 = O'U' = k\,OU = k$ *(Définition 22.2 du cours 22 [4]), ce qui est impossible. Donc* f_5 *n'est pas une similitude : c'est l'écriture* $z' = az + b$ *avec* $a = 0$, *exclue par le Théorème 22.11 du cours 22 [4].*

5 Deux points et leurs images

Exercice 8 *Soient* A, B, C, D *les points de coordonnées* $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,2)$.

1. *Existe-t-il une similitude qui transforme* A *en* C *et* B *en* D *? Combien y en a-t-il ?*
2. *Déterminer leurs écritures complexes et leur rapport.*
3. *Déterminer le centre et une mesure de l'angle de la similitude directe trouvée.*
4. *Déterminer le centre de la similitude indirecte trouvée.*

Solution 8

1. *Les points* A, B, C, D *ont pour affixes* $z_A = 1$, $z_B = \boldsymbol{i}$, $z_C = 2$, $z_D = 2 + 2\boldsymbol{i}$ *; on a* $A \neq B$ *et* $C \neq D$. *Par le Théorème 22.13 du cours 22 [4], il existe une similitude directe* f *et une seule, et une similitude indirecte* g *et une seule, qui transforment* A *en* C *et* B *en* D. *Elles sont distinctes, car une similitude n'est pas à la fois directe et indirecte (Théorème 22.9 (ii) du cours 22 [4]). Enfin, une similitude* s *qui transforme* A *en* C *et* B *en* D *est directe ou indirecte (Théorème 22.9 (ii) du cours 22 [4]), donc égale à* f *ou à* g *par l'unicité. Il y a donc exactement deux telles similitudes :* f, *directe, et* g, *indirecte.*

2. *Par le Théorème 22.13 (i) du cours 22 [4], f a pour écriture complexe $z' = az + b$, avec*

$$a = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{2\boldsymbol{i}}{-1+\boldsymbol{i}} = \frac{2\boldsymbol{i}\,(-1-\boldsymbol{i})}{(-1+\boldsymbol{i})\,(-1-\boldsymbol{i})} = \frac{2-2\boldsymbol{i}}{2} = 1-\boldsymbol{i}$$

et $b = z_C - az_A = 2 - (1-\boldsymbol{i}) = 1+\boldsymbol{i}$: $f : z' = (1-\boldsymbol{i})\,z + 1 + \boldsymbol{i}$. Par le Théorème 22.13 (ii) du cours 22 [4], g a pour écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, avec

$$a = \frac{z_D - z_C}{\overline{z_B - z_A}} = \frac{2\boldsymbol{i}}{-1-\boldsymbol{i}} = \frac{2\boldsymbol{i}\,(-1+\boldsymbol{i})}{(-1-\boldsymbol{i})\,(-1+\boldsymbol{i})} = \frac{-2-2\boldsymbol{i}}{2} = -1-\boldsymbol{i}$$

et $b = z_C - a\overline{z_A} = 2 + 1 + \boldsymbol{i} = 3 + \boldsymbol{i}$: $g : z' = (-1-\boldsymbol{i})\,\bar{z} + 3 + \boldsymbol{i}$. Leur rapport est

$$\frac{CD}{AB} = \frac{|2\boldsymbol{i}|}{|-1+\boldsymbol{i}|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(Théorème 22.13 du cours 22 [4]). Contrôle : $(1-\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i} + 1 + \boldsymbol{i} = 2 + 2\boldsymbol{i}$ et $(-1-\boldsymbol{i})\,(-\boldsymbol{i}) + 3 + \boldsymbol{i} = (-1+\boldsymbol{i}) + 3 + \boldsymbol{i} = 2 + 2\boldsymbol{i}$.

3. *Par la Définition 12.5 du cours 12,*

$$1-\boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{2}\,e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}},$$

donc $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de f (Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [4] et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1]). Comme $1-\boldsymbol{i} \neq 1$, le centre Ω de f a pour affixe

$$\frac{1+\boldsymbol{i}}{1-(1-\boldsymbol{i})} = \frac{1+\boldsymbol{i}}{\boldsymbol{i}} = (1+\boldsymbol{i})\,(-\boldsymbol{i}) = 1-\boldsymbol{i}$$

(Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]) : $\Omega\,(1,-1)$. Contrôle : $(1-\boldsymbol{i})^2 = -2\boldsymbol{i}$, et $-2\boldsymbol{i} + 1 + \boldsymbol{i} = 1 - \boldsymbol{i}$.

4. *Le rapport de g est $k = \sqrt{2} \neq 1$: par le Théorème 22.18 (ii) du cours 22 [4], avec $a = -1-\boldsymbol{i}$, $b = 3+\boldsymbol{i}$ et $a\bar{b} = (-1-\boldsymbol{i})\,(3-\boldsymbol{i}) = -4-2\boldsymbol{i}$, le centre Ω' de g a pour affixe*

$$\frac{a\bar{b}+b}{1-k^2} = \frac{-4-2\boldsymbol{i}+3+\boldsymbol{i}}{1-2} = 1+\boldsymbol{i},$$

soit $\Omega'\,(1,1)$. Contrôle : $(-1-\boldsymbol{i})\,(1-\boldsymbol{i}) + 3 + \boldsymbol{i} = -2 + 3 + \boldsymbol{i} = 1 + \boldsymbol{i}$. Les centres de f et de g sont distincts.

6 Similitudes directes

Exercice 9 *Pour tout réel θ, on note s_θ la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle θ.*

1. *Montrer que s_θ a pour écriture complexe $z' = 2e^{i\theta}z$.*
2. *Déterminer l'image B' du point $B(1,0)$ par $s_{\frac{\pi}{2}}$. Montrer que $OB' = 2\,OB$, et que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}\right)$.*
3. *Montrer que $s_\pi = h(O,-2)$, et déterminer l'image du point $D(1,1)$ par s_π.*
4. *Déterminer l'image du point D par $s_{\frac{\pi}{4}}$.*

Solution 9

1. *Le rapport 2 est différent de 1 : par le Théorème 22.17 (i) du cours 22 [4], $s_\theta = h(O,2) \circ r(O,\theta)$. Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3], $r(O,\theta)$ envoie z sur $z_1 = e^{i\theta}z$; par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], $h(O,2)$ envoie z_1 sur $2z_1$. Donc s_θ envoie z sur $2e^{i\theta}z$.*
2. *Comme $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ (Définition 12.5 du cours 12 [1]), B' a pour affixe $2i \times 1 = 2i$: $B'(0,2)$. Par le Théorème 12.7 (ii) du cours 12 [1], $OB = 1$ et $OB' = |2i| = 2 = 2\,OB$. Par le Théorème 12.15 du cours 12, les mesures de $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}\right)$ sont les arguments de $\frac{2i-0}{1-0} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$; $\frac{\pi}{2}$ en est un (Théorème 12.10 (ii) du cours 12 [1]), donc $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}\right)$.*
3. *Comme $e^{i\pi} = -1$, s_π a pour écriture complexe $z' = -2z$, c'est-à-dire $z' - 0 = -2(z-0)$: par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], $s_\pi = h(O,-2)$. L'image de D, d'affixe $1+i$, a pour affixe $-2-2i$: c'est le point $D'(-2,-2)$. L'homothétie de centre O et de rapport -2 est donc la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle π.*
4. *Par la Définition 12.5 du cours 12 [1], $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, donc $2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i)$. L'image de D par $s_{\frac{\pi}{4}}$ a pour affixe*

$$\sqrt{2}(1+i)(1+i) = \sqrt{2} \times 2i = 2\sqrt{2}\,i,$$

et c'est le point de coordonnées $\left(0, 2\sqrt{2}\right)$.

Exercice 10 *Soit f l'application d'écriture complexe $z' = -2iz + 2 + 4i$.*

1. *Montrer que f est une similitude directe, et donner son rapport et une mesure de son angle.*
2. *Déterminer son centre Ω, puis sa forme réduite.*

3. *Déterminer les écritures complexes de* $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ *et de* $h(\Omega, 2)$*, et contrôler la forme réduite en composant ces écritures, dans les deux ordres.*

4. *Déterminer le rapport, une mesure de l'angle, le centre et l'écriture complexe de* f^{-1}*.*

Solution 10

1. *Le coefficient* $-2\boldsymbol{i}$ *est non nul : par le Théorème 22.11 du cours 22 [4], f est une similitude directe de rapport* $|-2\boldsymbol{i}| = 2$*. Comme* $-2\boldsymbol{i} = 2e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$ *(Définition 12.5 du cours 12),* $-\frac{\pi}{2}$ *est une mesure de son angle (Théorème 22.14 (ii) du cours 22 [4] et Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1]).*

2. *Comme* $-2\boldsymbol{i} \neq 1$*, le centre* Ω *de f a pour affixe*

$$\omega = \frac{2+4\boldsymbol{i}}{1+2\boldsymbol{i}} = \frac{2(1+2\boldsymbol{i})}{1+2\boldsymbol{i}} = 2$$

(Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]) : $\Omega(2,0)$*. Par le Théorème 22.16 (iii) du cours 22 [4], la forme réduite de f est* $f = h(\Omega, 2) \circ r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$*.*

3. *Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3], avec* $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = -\boldsymbol{i}$*,* $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ *envoie z sur* $2 - \boldsymbol{i}(z-2) = -\boldsymbol{i}z + 2 + 2\boldsymbol{i}$*. Par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4],* $h(\Omega, 2)$ *envoie z sur* $2 + 2(z-2) = 2z - 2$*. La composée* $h(\Omega, 2) \circ r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right)$ *envoie z sur*

$$2(-\boldsymbol{i}z + 2 + 2\boldsymbol{i}) - 2 = -2\boldsymbol{i}z + 2 + 4\boldsymbol{i},$$

et $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{2}\right) \circ h(\Omega, 2)$ *envoie z sur* $-\boldsymbol{i}(2z-2) + 2 + 2\boldsymbol{i} = -2\boldsymbol{i}z + 2 + 4\boldsymbol{i}$ *: dans les deux ordres, on obtient l'écriture complexe de f.*

4. *Par le Théorème 22.15 (ii) du cours 22 [4],* f^{-1} *est une similitude directe de rapport* $\frac{1}{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$*. Comme f est une bijection (Théorème 22.6 (i) du cours 22 [4]),* $M' = f^{-1}(M)$ *si et seulement si* $f(M') = M$*, c'est-à-dire* $z = -2\boldsymbol{i}z' + 2 + 4\boldsymbol{i}$*, ou encore*

$$z' = \frac{z - 2 - 4\boldsymbol{i}}{-2\boldsymbol{i}} = \frac{\boldsymbol{i}}{2}(z - 2 - 4\boldsymbol{i}) = \frac{\boldsymbol{i}}{2}z + 2 - \boldsymbol{i}.$$

Le coefficient $\frac{\boldsymbol{i}}{2} = \frac{1}{2}e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}$ *est différent de* 1 *: le centre de* f^{-1} *a pour affixe* $\frac{2-\boldsymbol{i}}{1-\frac{\boldsymbol{i}}{2}} = \frac{2(2-\boldsymbol{i})}{2-\boldsymbol{i}} = 2$ *(Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]) : c'est* Ω*.*

Exercice 11 *Soient A le point d'affixe* 5*, f la similitude directe de centre O, de rapport* 2 *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$*, et g la similitude directe de centre A, de rapport* 2 *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$*.*

1. *Déterminer les écritures complexes de f et de g.*

2. *Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de* f^{-1}*, de* $g \circ f$ *et de* $f \circ g$*.*

3. *Déterminer les écritures complexes de $g \circ f$ et de $f \circ g$. Montrer que ce sont des homothéties, dont on donnera les centres et les rapports. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles égales ?*

Solution 11

1. *Le rapport 2 est différent de 1 : par le Théorème 22.17 (i) du cours 22 [4], $f = h(O,2) \circ r\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ et $g = h(A,2) \circ r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Par le Théorème 20.4 (ii) du cours 20 [3], avec $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i}$, $r\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ envoie z sur $z_1 = 5 + \boldsymbol{i}(z-5)$; par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], $h(A,2)$ envoie z_1 sur $5 + 2(z_1 - 5) = 5 + 2\boldsymbol{i}(z-5)$. De même avec le centre O, d'affixe 0. Ainsi*

$$f : z' = 2\boldsymbol{i}z \qquad et \qquad g : z' = 2\boldsymbol{i}z + 5 - 10\boldsymbol{i}.$$

2. *Par le Théorème 22.15 du cours 22 [4], f^{-1} est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et $g \circ f$, $f \circ g$ sont des similitudes directes de rapport $2 \times 2 = 4$ et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.*

3. *La composée $g \circ f$ envoie z sur $2\boldsymbol{i}(2\boldsymbol{i}z) + 5 - 10\boldsymbol{i} = -4z + 5 - 10\boldsymbol{i}$, et $f \circ g$ envoie z sur $2\boldsymbol{i}(2\boldsymbol{i}z + 5 - 10\boldsymbol{i}) = -4z + 20 + 10\boldsymbol{i}$. Le coefficient -4 est bien égal à $4e^{\boldsymbol{i}\pi}$, conformément à la question 2. Comme -4 est un réel différent de 0 et de 1, le Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4] montre que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des homothéties de rapport -4, de centres respectifs les points d'affixes*

$$\frac{5 - 10\boldsymbol{i}}{1 - (-4)} = 1 - 2\boldsymbol{i} \qquad et \qquad \frac{20 + 10\boldsymbol{i}}{5} = 4 + 2\boldsymbol{i}.$$

Ces centres sont les uniques points invariants de $g \circ f$ et de $f \circ g$ (Théorème 22.1 (ii) du cours 22 [4]) ; ils sont distincts, donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Exercice 12 *Soient A, B, C, D les points d'affixes $z_A = 1 + \boldsymbol{i}$, $z_B = 3 + \boldsymbol{i}$, $z_C = 3 + 3\boldsymbol{i}$, $z_D = 1 + 3\boldsymbol{i}$, sommets d'un carré, et I le point d'affixe $z_I = 2 + 2\boldsymbol{i}$.*

1. *Montrer qu'il existe une similitude directe s et une seule qui transforme A en A et B en C, et déterminer son écriture complexe.*

2. *Montrer que s est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.*

3. *Montrer que I est le milieu de $[BD]$, et que $s(I) = D$. Déterminer l'affixe du point $E = s(D)$.*

4. *Montrer, sans calculer son affixe, que le milieu de $[CE]$ est D.*

Solution 12

1. *On a $A \neq B$ et $A \neq C$: par le Théorème 22.13 (i) du cours 22 [4], appliqué aux points A, B, A, C, il existe une similitude directe s et une seule qui transforme A en A et B en C ; son écriture complexe est $z' = az + b$, avec*

$$a = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2 + 2\boldsymbol{i}}{2} = 1 + \boldsymbol{i}$$

et $b = z_A - az_A = (1 + \boldsymbol{i}) - (1 + \boldsymbol{i})^2 = (1 + \boldsymbol{i}) - 2\boldsymbol{i} = 1 - \boldsymbol{i}$. Ainsi $s : z' = (1 + \boldsymbol{i})\, z + 1 - \boldsymbol{i}$. Contrôle : $(1 + \boldsymbol{i})\,(3 + \boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = (2 + 4\boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = 3 + 3\boldsymbol{i}$.

2. *On a $1 + \boldsymbol{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}\right) = \sqrt{2}\, e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$ (Définition 12.5 du cours 12) : par les Théorèmes 22.11 et 22.14 (ii) du cours 22 [4] et le Théorème 12.10 (iii) du cours 12 [1], s a pour rapport $\sqrt{2}$, et $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de son angle. Comme $1 + \boldsymbol{i} \neq 1$, s a un point invariant et un seul, son centre (Théorème 22.16 (ii) du cours 22 [4]) ; or $s(A) = A$, donc ce centre est A. Par la Définition 22.5 du cours 22 [4], s est la similitude directe de centre A, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.*

3. *On a $\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{4 + 4\boldsymbol{i}}{2} = 2 + 2\boldsymbol{i} = z_I$: I est le milieu de $[BD]$ (Théorème 12.7 (iii) du cours 12 [1]). Puis $s(I)$ a pour affixe*

$$(1 + \boldsymbol{i})\,(2 + 2\boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i} + 1 - \boldsymbol{i} = 1 + 3\boldsymbol{i} = z_D,$$

donc $s(I) = D$, et $E = s(D)$ a pour affixe $(1 + \boldsymbol{i})\,(1 + 3\boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = (-2 + 4\boldsymbol{i}) + 1 - \boldsymbol{i} = -1 + 3\boldsymbol{i}$.

4. *Comme I est le milieu de $[BD]$, $s(I)$ est le milieu de $[s(B)\, s(D)]$ (Corollaire 22.1 (i) du cours 22 [4]), c'est-à-dire, par les questions 1 et 3, D est le milieu de $[CE]$. Contrôle : $\frac{(3+3\boldsymbol{i})+(-1+3\boldsymbol{i})}{2} = 1 + 3\boldsymbol{i} = z_D$.*

7 Similitudes indirectes

Exercice 13 *Soient $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$, et f la similitude indirecte de centre O, de rapport 3 et d'axe $\mathcal{D}$.*

1. *Écrire la forme réduite de f, et déterminer son écriture complexe.*
2. *Déterminer l'image C' du point $C(2, 3)$ par f, en appliquant d'abord l'homothétie, puis la symétrie orthogonale. Contrôler le résultat par l'écriture complexe.*
3. *Déterminer $f \circ f$.*

Solution 13

1. *La droite $\mathcal{D}$ passe par O, et $3 > 0$, $3 \neq 1$: par le Théorème 22.20 du cours 22, la similitude de l'énoncé existe et elle est unique ; c'est $f = h(O, 3) \circ S_{\mathcal{D}}$, qui est sa forme réduite (Définition 22.6 du cours 22 [4]). La*

droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1,1)$, d'affixe $1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\,e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$; le vecteur d'affixe $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}$, colinéaire, en est aussi un vecteur directeur (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]). Par le Théorème 20.4 (iv) du cours 20 [3], avec $\omega=0$ et $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $S_{\mathcal{D}}$ envoie z sur $z_1=e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}\bar{z}=\boldsymbol{i}\bar{z}$; par le Théorème 22.1 (i) du cours 22 [4], $h\,(O,3)$ envoie z_1 sur $3z_1$. L'écriture complexe de f est donc $z'=3\boldsymbol{i}\bar{z}$.

2. *Par le Théorème 22.19 (i) du cours 22 [4], $f=S_{\mathcal{D}}\circ h\,(O,3)$: on peut appliquer d'abord l'homothétie. Par la Définition 22.1 du cours 22 [4], $h\,(O,3)$ envoie C sur le point C_1 tel que $\overrightarrow{OC_1}=3\overrightarrow{OC}$, c'est-à-dire $C_1\,(6,9)$. Avec $z=x+\boldsymbol{i}y$, $\boldsymbol{i}\bar{z}=\boldsymbol{i}\,(x-\boldsymbol{i}y)=y+\boldsymbol{i}x$: $S_{\mathcal{D}}$ échange les coordonnées, et $C'=S_{\mathcal{D}}\,(C_1)$ est le point $C'\,(9,6)$.*

   Contrôle : $3\boldsymbol{i}\,\overline{2+3\boldsymbol{i}}=3\boldsymbol{i}\,(2-3\boldsymbol{i})=9+6\boldsymbol{i}$.

3. *Le rapport 3 est différent de 1 : par le Théorème 22.18 du cours 22 [4], avec $a=3\boldsymbol{i}$ et $b=0$, $f\circ f$ a pour écriture complexe $z''=9z$, et $f\circ f=h\,(O,9)$. Par exemple, $f\,(C')$ a pour affixe $9\,(2+3\boldsymbol{i})=18+27\boldsymbol{i}$.*

Exercice 14 *Soit f l'application d'écriture complexe $z'=-2\boldsymbol{i}\bar{z}+3$.*

1. *Montrer que f est une similitude indirecte, et donner son rapport.*
2. *Déterminer son centre Ω.*
3. *Déterminer une équation de son axe $\mathcal{D}$, et sa forme réduite.*
4. *Déterminer l'écriture complexe de $f\circ f$, et sa nature.*
5. *Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\Omega M'}=2\overrightarrow{\Omega M}$. Contrôler le résultat avec le point $P\,(0,1)$.*

Solution 14

1. *Le coefficient $a=-2\boldsymbol{i}$ est non nul : par le Théorème 22.12 du cours 22 [4], f est une similitude indirecte de rapport $k=|-2\boldsymbol{i}|=2$.*
2. *Comme $k=2\neq 1$, f a un point invariant et un seul, son centre Ω (Théorème 22.18 (ii) du cours 22 [4]). Avec $b=3$, $a\bar{b}+b=-6\boldsymbol{i}+3$, et Ω a pour affixe*
$$\omega=\frac{a\bar{b}+b}{1-k^2}=\frac{3-6\boldsymbol{i}}{-3}=-1+2\boldsymbol{i},$$
   soit $\Omega\,(-1,2)$. Contrôle : $-2\boldsymbol{i}\,\overline{(-1+2\boldsymbol{i})}+3=-2\boldsymbol{i}\,(-1-2\boldsymbol{i})+3=(2\boldsymbol{i}-4)+3=-1+2\boldsymbol{i}$.
3. *On a $-2\boldsymbol{i}=2e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}}=2e^{2\boldsymbol{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$: le réel $\alpha=-\frac{\pi}{4}$ vérifie $a=ke^{2\boldsymbol{i}\alpha}$. Par le Théorème 22.19 du cours 22 [4], l'axe $\mathcal{D}$ de f est la droite passant par Ω de vecteur directeur d'affixe $e^{-\boldsymbol{i}\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i}$ (Définition*

12.5 du cours 12 [1]), ou encore de vecteur directeur $\overrightarrow{w}(1,-1)$*, colinéaire (Définition 14.6 (ii) du cours 14 [2]). Par la Définition 14.6 (i) du cours 14 [2],* $M(x,y)$ *appartient à* $\mathcal{D}$ *si et seulement s'il existe un réel* t *tel que* $x+1=t$ *et* $y-2=-t$*, c'est-à-dire si et seulement si* $y-2=-(x+1)$*. L'axe* $\mathcal{D}$ *a pour équation* $y=-x+1$*, et la forme réduite de* f *est* $f=h(\Omega,2)\circ S_{\mathcal{D}}$ *(Définition 22.6 du cours 22 [4]).*

4. *Par le Théorème 22.18 du cours 22 [4],* $f\circ f$ *a pour écriture complexe*

$$z''=k^2z+a\bar{b}+b=4z+3-6\boldsymbol{i},$$

et, comme $k\neq 1$*,* $f\circ f=h(\Omega,4)$*.*

5. *Par le Théorème 22.19 (ii) du cours 22 [4], l'ensemble des points* M *tels que* $\overrightarrow{\Omega M'}=2\overrightarrow{\Omega M}$ *est l'axe* $\mathcal{D}$*, d'équation* $y=-x+1$*. Contrôle : les coordonnées de* $P(0,1)$ *vérifient* $y=-x+1$*, et son image* P' *a pour affixe* $-2\boldsymbol{i}\times(-\boldsymbol{i})+3=1$*. Par le Théorème 12.7 (i) du cours 12 [1], les vecteurs* $\overrightarrow{\Omega P'}$ *et* $\overrightarrow{\Omega P}$ *ont pour affixes*

$$1-(-1+2\boldsymbol{i})=2-2\boldsymbol{i}=2(1-\boldsymbol{i}) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{i}-(-1+2\boldsymbol{i})=1-\boldsymbol{i},$$

donc $\overrightarrow{\Omega P'}=2\overrightarrow{\Omega P}$*.*

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 20. Isométries du plan, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 22. Similitudes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.