Fiche de Révision : Suites Numériques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 1.1*, *Théorème 1.8*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 1 [1], et les renvois *cours 2* et *cours 3* aux cours sur la limite d'une fonction et sur la continuité [2, 3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Définition et propriétés d'une suite

- **Définition 1.1 (suite) :**
  - Une suite est une liste de nombres réels ; par exemple $3, 1, -5, \ldots$
  - Notation : $U_1 = 3, U_2 = 1, U_3 = -5, \ldots$ avec U_n le terme d'indice n.
  - La suite peut commencer à U_0, ou à un indice p quelconque ; on la note alors $(U_n)_{n\geq p}$.
- **Définition 1.2 (sens de variation) :**
  - Croissante si $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n, strictement si $U_{n+1} > U_n$ pour tout n.
  - Décroissante si $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout n, strictement si $U_{n+1} < U_n$ pour tout n.
  - Monotone si elle est croissante ou décroissante.
  - **Remarque 1.1 (deux méthodes) :** on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$, ou, si $U_n > 0$ pour tout n, on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.
- **Définition 1.3 (suite bornée) :**
  - Majorée s'il existe k tel que $U_n \leq k$ pour tout n.
  - Minorée s'il existe m tel que $U_n \geq m$ pour tout n.
  - Bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

2 Suites arithmétiques

- **Définition 1.4 (suite arithmétique) :** suite arithmétique de raison r : $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Théorème 1.1 (terme général) :** $U_n = U_0 + nr$, et plus généralement $U_n = U_p + (n-p)\,r$ (par exemple $U_n = U_1 + (n-1)\,r$).
- **Théorème 1.2 (somme des premiers entiers non nuls) :** $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.
- **Théorème 1.3 (somme des termes) :** $U_0 + \ldots + U_n = (n+1)\frac{U_0+U_n}{2}$; plus généralement, somme = (nombre de termes) $\times$ (premier terme + dernier terme)/2.

3 Suites géométriques

- **Définition 1.5 (suite géométrique) :** suite géométrique de raison q : $U_{n+1} = qU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Théorème 1.4 (terme général) :** $U_n = U_0 q^n$, et plus généralement $U_n = U_p q^{n-p}$ pour $n \geq p$ (par exemple $U_n = U_1 q^{n-1}$ pour $n \geq 1$).
- **Théorème 1.5 (somme des termes) :** pour $q \neq 1$, $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $U_0 + \ldots + U_n = U_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; plus généralement, somme = (premier terme) $\times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

4 Limites des suites

- **Définition 1.6 (limite d'une suite) :** $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ si tout intervalle $[\ell - a, \ell + a]$, avec $a > 0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. La suite est alors convergente ; si aucun réel ℓ ne convient, elle est divergente.
- **Remarque 1.2 (limite infinie et suite non bornée) :** une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée ; une suite qui tend vers $-\infty$ n'est pas minorée.
- **Théorèmes 1.6 et 1.7 (opérations sur les limites, suite $U_n = f(n)$) :** on fait la somme, le produit ou le quotient des limites hors formes indéterminées ; si $U_n = f(n)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$ (cours 2 [2]).
- **Théorème 1.8 (gendarmes et comparaison) :** si $V_n \leq U_n \leq W_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$; si $U_n \geq V_n$ à partir d'un certain rang et $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

- **Théorème 1.9 (passage à la limite) :** si $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang, et si (U_n) et (V_n) convergent, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim_{n\to+\infty} V_n$.
- **Théorème 1.10 (limite d'une suite récurrente) :** si $U_{n+1} = f(U_n)$, où f est définie sur un intervalle I qui contient tous les U_n, si (U_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue en ℓ (cours 3 [3]), alors $f(\ell) = \ell$.
- **Théorème 1.11 (limite de q^n) :**

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1, \\ 1, & \text{si } q = 1, \\ +\infty, & \text{si } q > 1, \\ \text{n'existe pas}, & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

- **Théorème 1.12 (convergence monotone) :** une suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) converge.

5 Raisonnement par récurrence

- **Théorème 1.13 (principe de récurrence) :** pour prouver une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq 0$, on montre $\mathcal{P}(0)$ (initialisation), puis, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (hérédité). Pour prouver $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq k$, on initialise à $\mathcal{P}(k)$ et on montre l'hérédité pour tout $n \geq k$ (Remarque 1.5 [1]).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 1. Suites numériques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.