Fiche de Révision : Limite d'une fonction

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 2.1*, *Théorème 2.5*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 2 [1], et le renvoi *cours 3* au cours sur la continuité [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Définition de la limite d'une fonction

- **Intuition :** $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ signifie que $f(x)$ s'approche de ℓ quand x s'approche de a.
- **Définition 2.1 (voisinage) :** un voisinage d'un réel a est un intervalle $]a-\delta, a+\delta[$ avec $\delta > 0$; un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un intervalle $]K, +\infty[$ (resp. $]-\infty, K[$).
- **Définition 2.2 (limite) :** soit f définie sur D ; a et ℓ sont des réels ou $\pm\infty$. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que $f(x) \in V$ pour tout $x \in W \cap D$, $x \neq a$. Par exemple, pour a et ℓ réels : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ avec $0 < |x-a| < \delta$, on ait $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- **Exemple 2.1 :** $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(-3x) = -\infty$.
- **Théorème 2.1 (limites de référence) :** $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 en $\pm\infty$; $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; x^n $(n \geq 1)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et en $-\infty$ vers $+\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair ; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; pour les fonctions continues usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, racine carrée, sinus, cosinus), $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ en tout point a où elles sont continues (cours 3 [2]).

2 Opérations sur les limites

- **Théorèmes 2.2 et 2.3 (somme, produit, quotient) :** on peut additionner, multiplier ou diviser les limites (pour un quotient, le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être en a), avec les règles sur $\pm\infty$ et la règle des signes, sauf dans les cas de forme indéterminée. Si

le numérateur tend vers un réel non nul ou vers $\pm\infty$ et le dénominateur vers 0 en gardant un signe constant (0^+ ou 0^-), le quotient tend vers $\pm\infty$ selon la règle des signes.

- **Formes indéterminées :** $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0\times\infty$, $+\infty+(-\infty)$.
- Lever l'indétermination dans la limite
  - **Factorisation par le terme de plus haut degré (Exemple 2.4) :** pour $x>0$, $\frac{x+4}{x+2}=\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{1+\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}}$, donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+4}{x+2}=1$.
  - **Forme conjuguée (Exemple 2.5) :** pour $x\geq 0$, $x\neq 1$, $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\sqrt{x}+1$, donc $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$.
- Limite d'une fonction composée
  - **Théorème 2.4 :** si $\lim_{x\to a}f(x)=b$ et $\lim_{X\to b}g(X)=c$, alors $\lim_{x\to a}g(f(x))=c$ (a, b, c réels ou $\pm\infty$) ; quand b est réel, on suppose de plus $f(x)\neq b$ pour x voisin de a, $x\neq a$, ou g continue en b.
  - **Exemple 2.6 :** $\lim_{x\to 1}\sqrt{x^3+4}=\sqrt{5}$.

3 Théorème des gendarmes

- **Théorème 2.5 (gendarmes) :** si $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ pour tout x d'un voisinage de a, $x\neq a$, et si $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=\ell\in\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$. De même, si $f(x)\geq g(x)$ et $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$, alors $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$; si $f(x)\leq h(x)$ et $\lim_{x\to a}h(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$.
- **Exercice du cours :** pour $x>0$, $-\frac{1}{x}\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq\frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$.

4 Limites à droite et à gauche

- **Définition 2.3 :** $\lim_{x\to a^+}f(x)=\ell$ si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a en restant supérieur à a ; $\lim_{x\to a^-}f(x)=\ell$ si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a en restant inférieur à a.
- **Théorème 2.6 :** $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$ si et seulement si les limites à droite et à gauche existent et valent ℓ. Si elles sont différentes, f n'a pas de limite en a.
- **Exemple 2.8 :** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, donc $\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0.

5 Asymptotes

- Asymptotes horizontale et verticale
  - **Définition 2.4 :** on note $\mathcal{C}_f$ la courbe de f. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$), $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ (ou en $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.
  - **Définition 2.5 :** si $\lim_{x\to a} f(x)$, ou l'une des limites à droite et à gauche en a, vaut $+\infty$ ou $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.
  - **Exemple 2.9 :** pour $f(x) = \frac{1}{|x-2|} + 1$, asymptote horizontale $y = 1$ (en $+\infty$ et en $-\infty$), et asymptote verticale $x = 2$.
- Asymptote oblique
  - **Définition 2.6 :** si $a \neq 0$ et $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$; de même en $-\infty$.
  - **Exemple 2.10 :** la courbe de $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x}$ admet $y = 2x - 1$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.