Fiche de Révision : Fonction continue, Continuité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 3.1*, *Théorème 3.4*...) renvoient aux énoncés numérotés du cours 3 [1], et le renvoi *cours 4* au cours sur la fonction dérivée [2]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Définition de la continuité

- **Intuition :** Une fonction f est continue sur un intervalle si l'on peut tracer sa courbe sur cet intervalle sans lever le crayon.
- **Définition 3.1 :** f, définie sur un intervalle I contenant a, est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- **Définition 3.2 :** f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I ; de même sur une réunion d'intervalles.
- **Exemple 3.1 :** $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$ n'est pas définie en 2 ; si l'on pose $f(2)=3$, elle est continue en 2.
- **Théorème 3.1 (admis) :** Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$; les fonctions rationnelles sur chaque intervalle où leur dénominateur ne s'annule pas ; $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,+\infty[$; ln sur $]0,+\infty[$; exp, sin, cos sur $\mathbb{R}$.

2 Opérations sur la continuité

- **Théorèmes 3.2 et 3.3 (admis) :**
  - La somme et le produit de deux fonctions continues sont continus.
  - Le rapport de deux fonctions continues est continu là où le dénominateur n'est pas nul.

– Si f, définie sur un intervalle I contenant a, est continue en a, et si g, définie sur un intervalle contenant $f(I)$, est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

- **Exemple 3.2 :** Avec $f(x) = x^3 + 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$, $g(f(x)) = \sqrt{x^3+4}$ est continue en 1 (on travaille sur $I = [0, +\infty[$, où $f(x) \geq 4$).

3 Théorème des valeurs intermédiaires

- **Théorème 3.4 (valeurs intermédiaires, admis) :** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$. Si f est strictement monotone, alors c est unique.

- **Corollaire 3.1 :** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Si f est strictement monotone, alors c est unique.

- **Remarque 3.1 (admise) :** Sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert d'extrémités $a < b$ (éventuellement infinies), si f est continue et admet des limites ℓ_a en a et ℓ_b en b (finies ou infinies), alors pour tout k strictement compris entre ℓ_a et ℓ_b, il existe au moins un $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = k$, unique si f est strictement monotone.

- **Exemple 3.3 :** $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ est continue sur $[1, 2]$, avec $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 4 > 0$; elle est strictement croissante, car $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ ($\Delta = -8 < 0$, coefficient de x^2 positif ; cours 4 [2]). Donc, par le Corollaire 3.1 [1], il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$.

4 Prolongement par continuité

- **Définition 3.3 :** Si f, définie sur $I \backslash \{a\}$ (I intervalle contenant a), est continue sur $I \backslash \{a\}$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ \ell, & x = a \end{cases}$ est continue en a : c'est le prolongement par continuité de f en a.

- **Remarque 3.2 :** Si f n'a pas de limite finie en a, elle n'est pas prolongeable par continuité en a.

- **Exemple 3.4 :** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$ pour $x \neq 0$ a un prolongement par continuité en 0 donné par $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.