Fiche de Révision : Fonction dérivée, dérivation

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 4.1*, *Théorème 4.5*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 4 [3]. Les renvois *cours 2* et *cours 3* désignent les cours sur la limite d'une fonction [1] et sur la continuité [2], et les renvois *cours 5*, *cours 6* et *cours 11* les cours sur les fonctions logarithme [4], exponentielle [5] et trigonométriques [6]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

- **Intuition :** une fonction est dérivable si sa courbe est lisse, sans changement brutal de direction.
- **Définition 4.1 (nombre dérivé) :** soit f définie sur un intervalle I non réduit à un point, et $a \in I$. Pour $x \in I$, $x \neq a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux de variation de f entre a et x. La fonction f est dérivable en a si ce taux a une limite *finie* quand x tend vers a (Définition 2.2 du cours 2 [1]) ; cette limite est notée
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
- **Définition 4.2 (fonction dérivée) :** f, définie sur un intervalle I non réduit à un point, est dérivable sur I si elle l'est en tout point de I ; $f' : x \mapsto f'(x)$ est sa fonction dérivée.
- **Exemple 4.1 :** pour $f(x) = x^2$, le taux de variation vaut $x + a$ pour $x \neq a$, donc $f'(a) = 2a$.

2 Dérivabilité et continuité

- **Théorème 4.1 :** une fonction dérivable en a est continue en a (Définition 3.1 du cours 3 [2]).
- **Exemple 4.2 :** la réciproque est fausse : $|x|$ est continue en 0 ($|x|$ tend vers 0 à droite et à gauche), mais n'y est pas dérivable, car $\frac{|x|}{x}$ tend vers 1 à droite de 0 et vers -1 à gauche.

3 Calcul des dérivées

- **Théorème 4.2 (dérivées de référence) :**

$f(x)$	k	x	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
dérivable sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$

  De plus, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$, et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ (cours 5, 6 et 11 [4, 5, 6]). La racine carrée n'est pas dérivable en 0.

- **Théorème 4.3 (somme, produit, quotient) :** si f et g sont définies sur un intervalle I et dérivables en $a \in I$, alors cf (c réel), $f+g$ et fg sont dérivables en a, ainsi que $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas sur I. Si f et g sont dérivables sur I, on a sur I :

$$(cf)' = cf', \quad (f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'$$

  et, si g ne s'annule pas sur I,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad \left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

  Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur tout intervalle où leur dénominateur ne s'annule pas.

- **Remarque 4.1 :** pour $x > 0$, écrire $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$ et appliquer $(x^n)' = nx^{n-1}$ permet de *retrouver* les formules, sans les démontrer.

- **Théorème 4.4 (fonction composée) :** si u est définie sur I, à valeurs dans l'intervalle J où v est définie, si u est dérivable en $a \in I$ et v dérivable en $u(a)$, alors $v \circ u$ est dérivable en a et

$$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times v'(u(a)).$$

- **Corollaire 4.1 (composées usuelles) :** pour u dérivable sur I et $n \geq 1$ entier,

$f(x)$	$u(x)^2$	$u(x)^n$	$\frac{1}{u(x)}$	$\sqrt{u(x)}$
$f'(x)$	$2u(x)u'(x)$	$nu(x)^{n-1}u'(x)$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
condition sur I	aucune	aucune	$u \neq 0$	$u > 0$

4 Sens de variation

- **Théorème 4.5 (sens de variation) :** soit f continue sur un intervalle I et dérivable en tout point de I qui n'en est pas une borne.
  - Si $f' \geq 0$ en ces points, f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$, f est décroissante sur I.
  - Si de plus f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points (par exemple si $f' > 0$, resp. $f' < 0$, en ces points), f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.
  - Si $f' = 0$ en ces points, f est constante sur I.
- **Exemple 4.5 :** $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f'(x) = 2x - 4$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$, strictement croissante sur $[2, +\infty[$, et admet un minimum $f(2) = -1$.

5 Tangente à une courbe

- **Définition 4.3 (tangente) :** si f, définie sur un intervalle I, est dérivable en $a \in I$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite qui passe par $(a, f(a))$ et a pour pente $f'(a)$:

  $$T : y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

  Elle est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$.
- **Exemple 4.6 :** pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$, la tangente au point d'abscisse 4 est $y = 4x - 13$.

6 Dérivée et calcul de limites

- Si f est dérivable en a, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ (Définition 4.1) : reconnaître un taux de variation lève certaines formes indéterminées $\frac{0}{0}$.
- **Exemple 4.7 :** $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = f'(1) = 3$, avec $f(x) = x^3$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[5] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[6] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.