Fiche de révision : Fonction logarithme

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 5.1*, *Théorème 5.2*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 5 [3]. Les renvois comme *Théorème 4.5 du cours 4* désignent un énoncé du cours sur la dérivation [2], un renvoi comme *Définition 2.5 du cours 2* un énoncé du cours sur la limite d'une fonction [1], et le renvoi *cours 6* le cours sur la fonction exponentielle [4]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Définition et sens de variation

- **Définition 5.1 (logarithme népérien) :** on admet qu'il existe une unique fonction f dérivable sur $]0,+\infty[$ telle que $f(1)=0$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$. Elle est notée ln. Le logarithme n'est défini que pour $x>0$; étant dérivable, ln est continue sur $]0,+\infty[$ (Théorème 4.1 du cours 4 [2]).
- **Théorème 5.1 (sens de variation et signe) :** ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, car $\ln'(x)=\frac{1}{x}>0$ (Théorème 4.5 du cours 4 [2]). Donc, pour tous $x,y>0$,

  $$\ln(x)=\ln(y)\Leftrightarrow x=y \quad \text{et} \quad \ln(x)<\ln(y)\Leftrightarrow x<y.$$

  En particulier, $\ln(x)<0$ pour $0<x<1$, $\ln(1)=0$, et $\ln(x)>0$ pour $x>1$.

2 Propriétés algébriques

- **Théorème 5.2 (propriétés algébriques) :** pour tous $x,y>0$ et tout entier relatif n,

  $$\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y),\quad \ln\left(\frac{1}{y}\right)=-\ln(y),\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y),$$
  $$\ln(x^n)=n\ln(x),\qquad \ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x).$$

  Pour $x\neq 0$, $\ln(x^2)=2\ln(|x|)$. Les puissances d'exposant réel sont définies dans le cours 6 [4].

3 Dérivée de $\ln u$

- **Théorème 5.3 (dérivée de $\ln u$) :** si u est dérivable sur un intervalle I et $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et

$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

- **Exemple 5.2 :** $(\ln(ax+b))' = \frac{a}{ax+b}$ sur tout intervalle où $ax + b > 0$ ($a \neq 0$).

4 Limites

- **Théorème 5.4 (limites aux bornes) :** $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$; la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de ln (Définition 2.5 du cours 2 [1]).

- **Théorème 5.5 (croissances comparées) :** pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0.$$

- **Remarque 5.1 :** ces limites restent vraies pour x^p, p réel strictement positif (cours 6 [4]) ; pour $\sqrt{x}$, on pose $y = \sqrt{x}$ et on applique le Théorème 5.5.

- **Exemple 5.5 :** $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ (taux de variation, Définition 4.1 du cours 4 [2]).

5 Équations, inéquations et nombre e

- **Théorème 5.6 (équation $\ln(x) = k$) :** pour tout réel k, l'équation $\ln(x) = k$ a une unique solution dans $]0, +\infty[$.

- **Définition 5.2 (nombre e) :** e est l'unique réel strictement positif tel que $\ln(e) = 1$; $e \approx 2{,}718$, et $\ln(e^n) = n$ pour tout entier relatif n.

- **Méthode :** chercher d'abord le domaine (chaque logarithme a un argument strictement positif), puis appliquer le Théorème 5.1, et garder les solutions qui sont dans le domaine.

6 Logarithme en base b

- **Définition 5.3 (logarithme en base b) :** pour $b > 0$, $b \neq 1$, et $x > 0$,

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

En particulier, le logarithme décimal est $\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

- **Théorème 5.7 (propriétés de $\log_b$) :** $\log_b$ a les propriétés algébriques de ln (produit, quotient, puissance entière), $\log_b(b^n) = n$ pour tout entier relatif n, $\log_b(x) = \log_b(y) \Leftrightarrow x = y$, et $\log_b$ est strictement croissante si $b > 1$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 2. Limite d'une fonction, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 5. Fonction logarithme, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.