Fiche de révision : Probabilité

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 7.1*, *Théorème 7.2*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 7 [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ce cours est disponible sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

1 Univers, événements et probabilité

- **Définition 7.1 (probabilité sur un univers fini) :** sur un ensemble fini non vide Ω (l'univers), une probabilité est la donnée, pour chaque $\omega \in \Omega$, d'un réel $\mathbf{P}(\{\omega\}) \in [0,1]$, avec

$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) = 1 \ ;$$

pour toute partie A de Ω,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}), \qquad \mathbf{P}(\emptyset) = 0.$$

- **Définition 7.2 (vocabulaire) :** $\omega \in \Omega$ est une issue et $\{\omega\}$ un événement élémentaire ; une partie A de Ω est un événement ; $\bar{A} = \Omega \setminus A$ est l'événement contraire de A ; A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- **Exemples 7.1 et 7.2 :** lancer d'un dé équilibré, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$; lancer d'une pièce équilibrée, $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$, $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2}$.

2 Propriétés et probabilité uniforme

- **Théorème 7.1 (propriétés) :** pour tous événements A et B,

$$\begin{gathered}\mathbf{P}(\Omega) = 1, \qquad \mathbf{P}(\emptyset) = 0, \qquad 0 \le \mathbf{P}(A) \le 1,\\ A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A) \le \mathbf{P}(B), \qquad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),\\ \mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A), \qquad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).\end{gathered}$$

- **Corollaire 7.1 :** si $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, $\mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n)$.

- **Définition 7.3 et Théorème 7.2 (probabilité uniforme) :** $\mathbf{P}$ est uniforme (ou équiprobable) si $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ pour tout $\omega \in \Omega$; alors

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \text{pour tout événement } A.$$

  Les mots *au hasard*, *équilibré*, *indiscernables au toucher* conduisent à choisir la probabilité uniforme (Remarque 7.2).

3 Probabilité conditionnelle

- **Définition 7.4 (probabilité conditionnelle) :** pour un événement B tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et tout événement A,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

- **Théorème 7.3 :** si $\mathbf{P}(B) > 0$, $A \mapsto \mathbf{P}(A \mid B)$ est une probabilité sur Ω ; en particulier $\mathbf{P}(\bar{A} \mid B) = 1 - \mathbf{P}(A \mid B)$.

- **Théorème 7.4 (probabilités composées) :** si $\mathbf{P}(B) > 0$, $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}(A \mid B)$; si $n \geq 2$ et $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2 \mid A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

- **Définition 7.5 (partition) :** $B_1, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω s'ils sont deux à deux incompatibles et si $B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.

- **Théorème 7.5 (probabilités totales) :** si $B_1, \ldots, B_n$ est une partition de Ω avec $\mathbf{P}(B_i) > 0$ pour tout i, alors, pour tout événement A,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\,\mathbf{P}(A \mid B_i).$$

- **Théorème 7.6 (règles de l'arbre) :** les probabilités des branches issues d'un même nœud ont pour somme 1 ; la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches ; la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

- **Théorème 7.7 (formule de Bayes) :** si $\mathbf{P}(A) > 0$ et $\mathbf{P}(B) > 0$,

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \mid B)}{\mathbf{P}(A)} \ ;$$

  avec une partition $B_1, \ldots, B_n$ telle que $\mathbf{P}(B_i) > 0$ pour tout i, et $\mathbf{P}(A) > 0$,

$$\mathbf{P}(B_j \mid A) = \frac{\mathbf{P}(B_j)\,\mathbf{P}(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\,\mathbf{P}(A \mid B_i)}.$$

4 Indépendance

- **Définition 7.6 (événements indépendants) :** A et B sont indépendants si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.
- **Théorème 7.8 :** si $\mathbf{P}(B) > 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A)$; si A et B sont indépendants, A et $\bar{B}$ le sont, ainsi que $\bar{A}$ et B, et $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
- **Remarque 7.3 :** deux événements incompatibles de probabilités strictement positives ne sont jamais indépendants.
- **Définition 7.7 et Théorème 7.9 (indépendance mutuelle) :** des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si la probabilité de l'intersection de toute sous-famille d'au moins deux d'entre eux est le produit de leurs probabilités ; ils le restent quand on remplace certains d'entre eux par leurs contraires.
- **Remarque 7.4 (épreuves répétées) :** pour des répétitions d'une expérience qui n'influent pas les unes sur les autres, on suppose les événements liés à des répétitions différentes mutuellement indépendants ; c'est une hypothèse de modèle.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.