Fiche de révision : Primitive et intégrale

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 9.1*, *Théorème 9.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 9 [1]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ce cours est disponible sur la page mohamedkadhem.com/baccalaureat.

Dans toute la fiche, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1 Primitive

- **Définition 9.1 (primitive) :** une *primitive* sur I d'une fonction f définie sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$ sur I.
- **Exemple 9.1 :** une primitive de $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = \frac{x^2}{2}$.
- **Théorème 9.1 et Corollaire 9.1 :** si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les fonctions $F + c$, $c \in \mathbb{R}$; pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, une seule primitive G de f sur I vérifie $G(x_0) = y_0$. L'hypothèse d'intervalle est indispensable (Remarque 9.1).
- **Théorème 9.2 (primitives de référence) :** pour k réel, $k \to kx$, $x^n \to \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ($n \geq 0$ entier), $e^x \to e^x$, $\cos(x) \to \sin(x)$, $\sin(x) \to -\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$; $\frac{1}{x} \to \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- **Théorème 9.3 :** si F et G sont des primitives de f et g sur I, et si λ et μ sont des réels, alors $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.
- **Théorème 9.4 et Corollaire 9.2 (composée) :** si u est dérivable sur I à valeurs dans un intervalle J et v dérivable sur J, une primitive de $(v' \circ u) \times u'$ sur I est $v \circ u$. Ainsi, sur I, $u^n u' \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$ ($n \geq 0$ entier), $\frac{u'}{u} \to \ln(u)$ si $u > 0$ sur I, $e^u u' \to e^u$, et $e^{ax+b} \to \frac{1}{a} e^{ax+b}$ (sur $\mathbb{R}$) si $a \neq 0$.

2 Intégrale

- **Théorème 9.5 (admis) :** toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

- **Définition 9.2 (intégrale) :** pour f continue sur I, F une primitive de f sur I et $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

qui ne dépend pas de la primitive choisie. On a $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Remarque 9.2).

- **Exemple 9.6 :** $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

- **Théorème 9.6 :** pour f continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a. Par exemple $\ln(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour $x > 0$ (Remarque 9.3).

- **Théorème 9.7 (propriétés) :** pour f et g continues sur I, $a, b, c \in I$ et λ, μ réels,
  - linéarité : $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;
  - relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$;
  - positivité : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$;
  - comparaison : si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

- **Théorème 9.8 (intégration par parties) :** pour u et v dérivables sur I, de dérivées continues sur I, et $a, b \in I$,

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 9.7 : $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$.

3 Aire et valeur moyenne

- **Théorème 9.9 (admis) :** si $a < b$ et si f est continue et positive sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. Sans $f \geq 0$, l'intégrale n'est pas une aire (Remarque 9.4).

- **Corollaire 9.3 :** si $a < b$ et si $f \leq g$ sur $[a, b]$, avec f et g continues, l'aire, en unités d'aire, entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$ est $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$.

- **Définition 9.3 (valeur moyenne) :** pour $a < b$ et f continue sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.