Fiche de révision : Variable aléatoire

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 10.1*, *Théorème 10.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 10 [2], et un renvoi comme *Définition 7.1 du cours 7*, à un énoncé numéroté du cours sur les probabilités [1]. Le cours sur le dénombrement [3] est cité sans numéro. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

Dans toute la fiche, sauf mention contraire, $\mathbf{P}$ est une probabilité sur un univers fini Ω (Définition 7.1 du cours 7 [1]).

1 Variable aléatoire et loi

- **Définition 10.1 (variable aléatoire) :** une *variable aléatoire* est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$; pour tout réel x, $\{X = x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.
- **Définition 10.2 (loi) :** si $x_1, \ldots, x_m$ sont les valeurs *distinctes* prises par X, la *loi* de X est la donnée des couples $(x_i, \mathbf{P}(X = x_i))$, pour $i = 1, \ldots, m$.
- **Théorème 10.1 :** $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}(X = x_i) = 1$.

2 Espérance

- **Définition 10.3 (espérance) :**

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i \, \mathbf{P}(X = x_i).$$

- **Théorème 10.2 :** $\mathbf{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbf{P}(\{\omega\})$.
- **Théorème 10.3 (linéarité) :** pour toutes variables X, Y et tous réels a, b, $\mathbf{E}[aX + bY] = a\mathbf{E}[X] + b\mathbf{E}[Y]$ et $\mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b$; si $X \geq 0$, alors $\mathbf{E}[X] \geq 0$.

- **Théorème 10.4 (transfert) :** pour toute fonction f définie sur $\{x_1, \ldots, x_m\}$,
$$\mathbf{E}[f(X)] = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)\mathbf{P}(X = x_i).$$

3 Variance et écart-type

- **Définition 10.4 (variance, écart-type) :** $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] \geq 0$ et $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.
- **Théorème 10.5 (formule de König-Huygens) :**
$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$
- **Théorème 10.6 :** pour tous réels a et b, $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

4 Indépendance

- **Définition 10.5 (variables indépendantes) :** X et Y sont *indépendantes* si, pour tous réels x et y,
$$\mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$$
(Définition 7.6 du cours 7 [1]) ; $X_1, \ldots, X_n$ sont *indépendantes* si, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$, les événements $\{X_1 = a_1\}, \ldots, \{X_n = a_n\}$ sont mutuellement indépendants (Définition 7.7 du cours 7).
- **Remarque 10.1 :** des variables liées à des répétitions indépendantes d'une même expérience sont supposées indépendantes (Remarque 7.4 du cours 7 [1]).
- **Théorème 10.7 :** si X et Y sont indépendantes, $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$; si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes,
$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n).$$

5 Lois de Bernoulli et binomiale

- **Définition 10.6 (loi de Bernoulli) :** pour $p \in [0, 1]$, X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si elle ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $\mathbf{P}(X = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.
- **Théorème 10.8 :** alors $\mathbf{E}[X] = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$.
- **Définition 10.7 (coefficient binomial) :** $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ pour $n \geq 1$, $0! = 1$, et $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $0 \leq k \leq n$.

- **Théorème 10.9 :** pour $0 \leq k \leq n$, un ensemble à n éléments a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments (admis ici ; cours 17 [3]).

- **Définition 10.8 (loi binomiale) :** pour $n \geq 1$ et $p \in [0,1]$, X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ si elle prend ses valeurs dans $\{0,1,\ldots,n\}$ et si

$$\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0,1,\ldots,n\},$$

  avec la convention $0^0 = 1$.

- **Théorème 10.10 (nombre de succès) :** si $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de *même* paramètre p, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

- **Théorème 10.11 :** si X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbf{E}[X] = np$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

6 Loi des grands nombres

- **Théorème 10.12 (inégalité de Markov) :** si $X \geq 0$, alors pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbf{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{t}.$$

- **Théorème 10.13 (inégalité de Tchebychev) :** pour toute variable X et tout réel $t > 0$,

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}.$$

- **Théorème 10.14 (inégalité de concentration) :** si $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance V, et si $M_n = \frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)$, alors pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq t) \leq \frac{V}{nt^2}.$$

- **Théorème 10.15 (loi des grands nombres) :** soient μ et $V \geq 0$ deux réels *fixés*. Si, pour chaque $n \geq 1$, $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, de même loi, d'espérance μ et de variance V, sur un univers fini qui peut dépendre de n, alors pour tout réel $t > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(|M_n - \mu| \geq t) = 0.$$

- **Corollaire 10.1 (fréquence d'un succès) :** soit $p \in [0,1]$. Si, pour chaque $n \geq 1$, S_n est le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve dont le succès a la probabilité p (sur un univers fini qui dépend de n), alors pour tout réel $t > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2},$$

quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. C'est la probabilité d'un écart d'au moins t qui tend vers 0 (Remarque 10.2).

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 7. Probabilité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 10. Variable aléatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 17. Dénombrement, combinatoire, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.