Fiche de révision : Fonctions trigonométriques

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 11.1*, *Théorème 11.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 11 [3], et un renvoi comme *Théorème 4.2 du cours 4*, à un énoncé numéroté d'un autre cours : sur la continuité [1] ou la dérivation [2]. Le cours sur les nombres complexes [4] est cité sans numéro. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

- **Définition 11.1 (cercle trigonométrique) :** dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, c'est le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 ; $A = (1, 0)$; le sens trigonométrique est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.
- **Définition 11.2 (point associé ; existence admise) :** à tout réel x est associé un point $M(x)$ de $\mathcal{C}$: pour $0 \leq x < 2\pi$, l'extrémité de l'arc d'origine A, de longueur x, parcouru dans le sens trigonométrique (tout point de $\mathcal{C}$ est ainsi associé à un unique $x \in [0, 2\pi[$) ; $M(x) = M(y)$ si et seulement si $x = y + 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
- **Définition 11.3 (cosinus et sinus) :** $M(x) = (\cos x, \sin x)$.
- **Théorème 11.1 :** pour tout réel x et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x,$$
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1, \quad -1 \leq \sin x \leq 1.$$

- **Théorème 11.2 (lecture sur le cercle, admis) :** $M(0) = (1, 0)$, $M(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$, $M(\pi) = (-1, 0)$, $M(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$; pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, les coordonnées de $M(x)$ sont strictement positives ; pour $0 \leq x \leq \pi$, l'angle $\widehat{AOM(x)}$ mesure x radians ; les symétries d'axe $(O, \overrightarrow{u})$, de centre O, d'axe $(O, \overrightarrow{v})$ et d'axe $y = x$ envoient $M(x)$ sur $M(-x)$, $M(x + \pi)$, $M(\pi - x)$ et $M(\frac{\pi}{2} - x)$.

2 Symétries et valeurs remarquables

- **Théorème 11.3 (angles associés) :** pour tout réel x,

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \text{(cos est paire, sin est impaire)},$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x, \quad \sin(\pi + x) = -\sin x,$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x,$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x, \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x,$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\sin x, \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos x.$$

- **Théorème 11.4 (signe) :** $\sin x > 0$ sur $]0, \pi[$ et $\sin x < 0$ sur $]\pi, 2\pi[$; $\cos x > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\cos x < 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

- **Théorème 11.5 (valeurs remarquables) :**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3 Dérivées et variations

- **Théorème 11.6 (admis) :** sin et cos sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ (Théorème 3.1 (iv) du cours 3 [1], Théorème 4.2 du cours 4 [2]).

- **Corollaire 11.1 :** pour tous réels a et b, $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$ et $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$.

- **Théorème 11.7 :** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

- **Théorème 11.8 (sens de variation) :** cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, de 1 à -1 ; sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, de -1 à 1.

4 Équations trigonométriques

- **Théorème 11.9 :** pour tous réels x et α,

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi,$$
$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

- **Corollaire 11.2 :** les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ ont des solutions si et seulement si $|a| \leq 1$; il existe alors un unique $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = a$, et un unique $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\beta = a$.

5 Fonction tangente

- **Définition 11.4 :** sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, l'ensemble des réels où cos ne s'annule pas, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
- **Théorème 11.10 :** pour $x \in D$, $\tan(x+\pi) = \tan x$ et $\tan(-x) = -\tan x$; sur chaque intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$, tan est dérivable et

  $$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \ ;$$

  tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, de limite $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}$ à droite et $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.
- **Théorème 11.11 :** pour α et x dans D, $\tan x = \tan \alpha$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \alpha + k\pi$; pour tout réel a, il existe un unique $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan \alpha = a$.

6 Formules d'addition

- **Théorème 11.12 (admis ; cours 12 [4]) :** pour tous réels a et b,

  $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
  $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

- **Corollaire 11.3 (duplication) :** $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ et $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 3. Fonction continue, continuité, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 11. Fonctions trigonométriques, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 12. Nombres complexes, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.