Fiche de révision : Équations différentielles

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 13.1*, *Théorème 13.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 13 [4], et un renvoi comme *Théorème 9.1 du cours 9*, à un énoncé numéroté d'un autre cours : sur la dérivation [1], sur la fonction exponentielle [2] ou sur les primitives et les intégrales [3]. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Équations et solutions

- **Définition 13.1 (équation différentielle, solution) :** soit I un intervalle non réduit à un point. Une *équation différentielle* est une égalité qui relie une fonction inconnue, notée y, et ses dérivées y', y'', et ainsi de suite ; son *ordre* est l'ordre de la plus haute dérivée qui y figure. Une *solution sur* I d'une équation d'ordre 1 (resp. 2) est une fonction f dérivable (resp. deux fois dérivable) sur I telle que l'égalité soit vraie, f remplaçant y, pour tout $x \in I$. *Résoudre* l'équation sur I, c'est déterminer toutes ses solutions sur I.
- **Remarque 13.1 (l'intervalle est indispensable) :** les théorèmes de cette fiche reposent sur le fait qu'une fonction de dérivée nulle sur un intervalle y est constante (Théorème 4.5 (iii) du cours 4 [1]) ; c'est faux sur une réunion d'intervalles (Remarque 9.1 du cours 9 [3]).
- **Théorème 13.1 (équation $y' = g$) :** soit g une fonction continue sur un intervalle I, et G une primitive de g sur I (une telle primitive existe par le Théorème 9.5 du cours 9 [3]). Les solutions sur I de $y' = g$ sont exactement les fonctions $x \mapsto G(x) + c$, où c est un réel ; pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, il en existe une seule qui vérifie $y(x_0) = y_0$.
- **Exemple 13.3 (équations $y' = a$ et $y'' = a$) :** pour a réel, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = a$ sont les fonctions affines $x \mapsto ax + b$, b réel ; celles de $y'' = a$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + bx + c$, b, c réels.

2 Équation $y' = ay$

- **Théorème 13.2 (équation $y' = ay$) :** soient a un réel et I un intervalle (par exemple $\mathbb{R}$). Les solutions sur I de l'équation $y' = ay$ sont exactement les fonctions $x \mapsto ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$.
- **Corollaire 13.1 (condition initiale) :** soient a, x_0 et y_0 trois réels. L'équation $y' = ay$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(x_0) = y_0$ (une *condition initiale*) : c'est $x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.
- **Remarque 13.2 (la fonction exponentielle) :** avec $a = 1$, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, la seule solution de $y' = y$ qui vaut 1 en 0 est exp (Théorème 6.7 du cours 6 [2]).
- **Remarque 13.3 (en physique) :** le nombre $N(t)$ de noyaux d'un échantillon radioactif vérifie $N' = -\lambda N$, où $\lambda > 0$ est une constante : $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$.
- **Vocabulaire :** $y' = ay$, qui s'écrit $y' - ay = 0$, est une équation *homogène*. Écrite $y' - ay = b$ (resp. $y' - ay = g(x)$), l'équation a pour *second membre* b (resp. $g(x)$) : on parle d'équation avec second membre constant (resp. général) (Exemple 13.4).

3 Équation $y' = ay + b$

- **Théorème 13.3 (équation $y' = ay + b$) :** soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay + b$ sont exactement les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$; la fonction constante $-\frac{b}{a}$ en est une solution.
- **Remarque 13.4 (le cas $a = 0$) :** si $a = 0$, l'équation s'écrit $y' = b$; ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto bx + k$, k réel (Exemple 13.3).
- **Corollaire 13.2 (condition initiale) :** soient $a \neq 0$, b, x_0 et y_0 des réels. L'équation $y' = ay + b$ a une seule solution sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y(x_0) = y_0$: c'est
$$x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}.$$
- **Remarque 13.5 (en physique) :** si $a < 0$, toutes les solutions de $y' = ay + b$ tendent vers $-\frac{b}{a}$ quand x tend vers $+\infty$: c'est un retour à l'équilibre (refroidissement d'un objet, charge d'un condensateur).

4 Équation $y' = ay + g$

- **Théorème 13.4 (équation $y' = ay+g$) :** soient a un réel, g une fonction définie sur un intervalle I, et y_p une solution sur I de l'équation
$$y' = ay + g. \tag{E}$$

Les solutions sur I de (E) sont exactement les fonctions $x \mapsto ke^{ax} + y_{\mathrm{p}}(x)$, $k \in \mathbb{R}$. On dit que y_{p} est une *solution particulière* de (E), et que $y' = ay$ est l'*équation homogène associée*.

- **Corollaire 13.3 (condition initiale) :** sous les hypothèses du Théorème 13.4, pour $x_0 \in I$ et y_0 réel, (E) a une seule solution sur I qui vérifie $y(x_0) = y_0$: celle qui correspond à $k = (y_0 - y_{\mathrm{p}}(x_0))\, e^{-ax_0}$.
- **Remarque 13.6 (chercher y_{p} de la forme de g) :** on essaie une fonction de la même forme que g, à coefficients inconnus : un polynôme de même degré si g est un polynôme, $A\cos x + B\sin x$ si g est une combinaison de $\cos x$ et $\sin x$, etc. Il *suffit* de trouver des coefficients pour lesquels l'égalité est vraie pour tout x ; on vérifie alors directement que la fonction trouvée est solution.

5 Équation $y'' + \omega^2 y = 0$

- **Théorème 13.5 (équation $y'' + \omega^2 y = 0$) :** soit $\omega > 0$ un réel.

  (i) Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ sont exactement les fonctions
  $$x \mapsto \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

  (ii) Pour x_0, y_0 et y_1 réels, une seule solution vérifie $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$: c'est
  $$x \mapsto y_0 \cos\left(\omega(x - x_0)\right) + \frac{y_1}{\omega}\sin\left(\omega(x - x_0)\right).$$

  Il faut *deux* conditions initiales : la valeur et la dérivée en x_0. Si $\omega = 0$, l'équation est $y'' = 0$, dont les solutions sont les fonctions affines (Exemple 13.3).
- **Corollaire 13.4 (amplitude et phase) :** soit $\omega > 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont exactement les fonctions $x \mapsto A\cos(\omega x + \varphi)$, où $A \geq 0$ et φ sont des réels. Pour écrire $\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)$ sous cette forme, avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$: $A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, et φ est un réel tel que $\cos\varphi = \frac{\alpha}{A}$ et $\sin\varphi = -\frac{\beta}{A}$ (Exemple 13.7).
- **Remarque 13.7 (en physique) :** une masse m accrochée à un ressort de raideur k, sans frottement, a une position $x(t)$ qui vérifie $mx'' = -kx$, soit $x'' + \omega^2 x = 0$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le mouvement est une oscillation d'amplitude A et de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 4. Fonction dérivée, dérivation, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 6. Fonction exponentielle, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[3] Mohamed Kadhem Karray. Cours 9. Primitive et intégrale, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[4] Mohamed Kadhem Karray. Cours 13. Équations différentielles, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.