Fiche de révision : Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace

Mohamed Kadhem Karray
https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/

Les numéros des énoncés (*Définition 14.1*, *Théorème 14.1*, etc.) renvoient aux énoncés numérotés du cours 14 [1]. Le cours sur le produit scalaire et la géométrie dans l'espace [2] est cité sans numéro. Le numéro entre crochets renvoie à la bibliographie en fin de document. Ces cours sont disponibles sur la page `mohamedkadhem.com/baccalaureat`.

1 Vecteurs

Les points sont ceux du plan, ou ceux de l'espace.

- **Définition 14.1 (vecteur) :** à deux points A et B, pris dans cet ordre, on associe le *vecteur* $\overrightarrow{AB}$, d'origine A et d'extrémité B. Pour quatre points A, B, C, D, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. Le *vecteur nul* est $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$, qui ne dépend pas de A. La *norme* de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
- **Remarque 14.1 (lecture) :** si A, B, C, D ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ dit que $ABDC$ est un parallélogramme. Un vecteur *non nul* est déterminé par sa direction, son sens et sa longueur ; il ne dépend pas de son origine.
- **Théorème 14.1 (fondements du calcul vectoriel, admis) :** soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. (i) Pour tout point A, il existe un point B et un seul tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. (ii) Si $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ ne dépend que de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pas du point A. (iii) Deux vecteurs égaux ont la même norme, notée $\|\vec{u}\|$.
- **Définition 14.2 (somme, produit par un réel) :** la *somme* $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$ du Théorème 14.1 (ii) ; pour tous points A, B, C, on a la *relation de Chasles* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Pour t réel, $t\vec{u} = \vec{0}$ si $t = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$; sinon, $t\vec{u}$ a la direction de $\vec{u}$, la norme $|t|\,\|\vec{u}\|$, et le sens de $\vec{u}$ si $t > 0$, le sens contraire si $t < 0$. L'*opposé* de $\vec{u}$ est $-\vec{u} = (-1)\vec{u}$, et $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

- **Théorème 14.2 (règles de calcul, admis) :** pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et tous réels s, t : $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$; $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$; $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$; $\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{u})=\overrightarrow{0}$; $1\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}$; $t(s\overrightarrow{u})=(ts)\overrightarrow{u}$; $(t+s)\overrightarrow{u}=t\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{u}$; $t(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=t\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$. On calcule donc avec les vecteurs comme avec les nombres.
- **Remarque 14.2 (points et vecteurs) :** les points et les vecteurs forment deux ensembles différents : on ne confond pas un point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- **Définition 14.3 (parallélogramme) :** un quadrilatère $ABCD$ est un *parallélogramme* si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu ; il est dit *aplati* si ses quatre sommets sont alignés.
- **Théorème 14.3 (opposé, milieu, parallélogramme) :** (i) $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$, et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $A=B$. (ii) $t\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ si et seulement si $t=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$. (iii) I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. (iv) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.
- **Exemple 14.1 (règle du parallélogramme) :** si $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

2 Colinéarité, droites et plans

- **Définition 14.4 (combinaison linéaire, famille libre ou liée) :** une *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{u}_1,\ldots,\overrightarrow{u}_n$ est un vecteur $t_1\overrightarrow{u}_1+\cdots+t_n\overrightarrow{u}_n$, où $t_1,\ldots,t_n$ sont des réels. La famille $(\overrightarrow{u}_1,\ldots,\overrightarrow{u}_n)$ est *libre* si $t_1\overrightarrow{u}_1+\cdots+t_n\overrightarrow{u}_n=\overrightarrow{0}$ entraîne $t_1=\cdots=t_n=0$; elle est *liée* sinon. La liberté est une propriété de la famille, pas de chaque vecteur.
- **Définition 14.5 (colinéaires, coplanaires) :** deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est liée ; trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont *coplanaires* si la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est liée.
- **Théorème 14.4 (reconnaître la colinéarité et la coplanarité) :** (i) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. (ii) Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{v}=t\overrightarrow{u}$. (iii) Si $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe des réels s, t tels que $\overrightarrow{w}=s\overrightarrow{u}+t\overrightarrow{v}$.
- **Définition 14.6 (droite, vecteur directeur, droites parallèles) :** soient A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur *non nul*. La *droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}$ pour un réel t. Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{u}$ en est aussi un vecteur directeur. Deux droites sont *parallèles* si un vecteur directeur de l'une et un vecteur directeur de l'autre sont colinéaires.

- **Théorème 14.5 (droites, admis) :** (i) Cet ensemble est une droite au sens du collège ; il ne change pas si l'on remplace A par un autre de ses points, ou $\overrightarrow{u}$ par un autre vecteur directeur ; deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires. (ii) Par deux points distincts A et B passe une droite et une seule, (AB) : la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
- **Théorème 14.6 (alignement et colinéarité) :** trois points A, B, C sont *alignés* (sur une même droite) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Si $A \neq B$, c'est le cas si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.
- **Définition 14.7 (plan, vecteurs directeurs) :** soient A un point de l'espace et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une famille *libre*. Le *plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$* est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{v}$ pour des réels s, t.
- **Théorème 14.7 (plans, admis) :** (i) Cet ensemble est un plan au sens du collège ; il ne change pas si l'on remplace A par un autre de ses points, ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ par une autre famille libre de vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, avec M, N dans le plan. (ii) Par trois points non alignés A, B, C passe un plan et un seul, (ABC) : le plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. (iii) Trois points, ou quatre points dont trois sont alignés, appartiennent toujours à un même plan.
- **Théorème 14.8 (coplanarité de quatre points) :** quatre points A, B, C, D de l'espace sont *coplanaires* (dans un même plan) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Si A, B, C ne sont pas alignés, c'est le cas si et seulement s'il existe des réels s, t tels que $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$.

3 Dans le plan

- **Définition 14.8 (base du plan) :** une *base* du plan est une famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de deux vecteurs du plan non colinéaires, c'est-à-dire une famille libre.
- **Théorème 14.9 (coordonnées d'un vecteur) :** soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base du plan. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan s'écrit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ (existence admise), avec des réels x, y uniques (car la famille est libre) : ce sont ses *coordonnées* dans la base, et l'on note $\overrightarrow{u}(x, y)$.
- **Remarque 14.3 (égalité de deux vecteurs) :** deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.
- **Définition 14.9 (repère du plan) :** un *repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est formé d'un point O, l'*origine*, et d'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les coordonnées d'un point M sont celles de $\overrightarrow{OM}$: $M(x, y)$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$; x est l'*abscisse*, y l'*ordonnée* de M.

- **Corollaire 14.1 (points et couples) :** dans un repère du plan, tout point a un couple de coordonnées et un seul, et tout couple de réels est celui d'un point et d'un seul.
- **Théorème 14.10 (coordonnées et opérations) :** dans un repère du plan, soient $\overrightarrow{u}(x,y)$, $\overrightarrow{v}(x',y')$, t un réel, $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$. (i) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $(x+x',y+y')$, et $t\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées (tx,ty). (ii) $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A,y_B-y_A). (iii) Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. Ces formules valent dans *tout* repère.
- **Théorème 14.11 (critère de colinéarité) :** dans une base du plan, $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$. On n'utilise pas le rapport des coordonnées, qui n'a pas de sens si une coordonnée est nulle.
- **Théorème 14.12 (représentation paramétrique, équation cartésienne) :** dans un repère du plan, soient $A(x_A,y_A)$, $\overrightarrow{u}(a,b)$ non nul, et $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Pour tout point $M(x,y)$: (i) $M\in\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $x=x_A+ta$ et $y=y_A+tb$; (ii) $M\in\mathcal{D}$ si et seulement si $b(x-x_A)-a(y-y_A)=0$.
- **Définition 14.10 (représentation paramétrique, équation cartésienne) :** le système de (i), t décrivant $\mathbb{R}$, est une *représentation paramétrique* de $\mathcal{D}$. Une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$ est une équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, dont les solutions sont exactement les couples de coordonnées des points de $\mathcal{D}$; celle de (ii) en est une.
- **Théorème 14.13 (toute équation $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est celle d'une droite) :** dans un repère du plan, si $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est une droite, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-\beta,\alpha)$.
- **Remarque 14.4 (une équation, pas l'équation) :** en multipliant une équation cartésienne par un réel non nul, on obtient une autre équation cartésienne de la même droite : on dit *une* équation cartésienne.
- **Théorème 14.14 (position de deux droites) :** dans un repère du plan, soient $\mathcal{D}:\alpha x+\beta y+\gamma=0$, $\mathcal{D}':\alpha' x+\beta' y+\gamma'=0$ et $\delta=\alpha\beta'-\alpha'\beta$. (i) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\delta=0$; elles sont alors confondues, ou sans point commun (strictement parallèles). (ii) Si $\delta\neq0$, elles sont *sécantes* : elles ont un point commun et un seul, de coordonnées

$$x=\frac{\beta\gamma'-\beta'\gamma}{\delta},\qquad y=\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}{\delta},$$

qu'on peut aussi trouver par substitution (Exemple 14.7).

4 Dans l'espace

- **Définition 14.11 (base, repère de l'espace) :** une *base* de l'espace est une famille $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de trois vecteurs non coplanaires, c'est-à-dire une famille libre ; un *repère* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est formé d'un point O et d'une base.
- **Théorème 14.15 (coordonnées dans l'espace) :** dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout vecteur s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (existence admise), avec des réels x, y, z uniques : on note $\vec{u}(x, y, z)$, et $M(x, y, z)$ pour les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$. Tout point a un triplet de coordonnées et un seul, et tout triplet de réels est celui d'un point et d'un seul.
- **Corollaire 14.2 (calculer dans l'espace) :** les formules du Théorème 14.10 restent vraies avec une troisième coordonnée (celles sur les vecteurs ne dépendent que de la base) : les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ et $z_B - z_A$, et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.
- **Méthode (Exemples 14.8 et 14.9) :** dans l'espace, on reconnaît la colinéarité ou la coplanarité en cherchant les réels du Théorème 14.4 : on résout $\vec{v} = t\vec{u}$, ou $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$, coordonnée par coordonnée. Par exemple, $\overrightarrow{AB}(1, 2, 3)$, non nul, et $\overrightarrow{AC}(2, 4, 5)$ ne sont pas colinéaires : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ donnerait $k = 2$ par la première coordonnée, et $5 = 3k = 6$ par la troisième.
- **Théorème 14.16 (représentations paramétriques) :** dans un repère de l'espace, soit $A(x_A, y_A, z_A)$. (i) Si $\vec{u}(a, b, c) \neq \vec{0}$, $M(x, y, z)$ appartient à la droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

  $$x = x_A + ta, \quad y = y_A + tb, \quad z = z_A + tc.$$

  (ii) Si $(\vec{u}(a, b, c), \vec{v}(a', b', c'))$ est libre, $M(x, y, z)$ appartient au plan passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ si et seulement s'il existe des réels s, t tels que

  $$x = x_A + sa + ta', \quad y = y_A + sb + tb', \quad z = z_A + sc + tc'.$$

  Ces systèmes, le paramètre t (ou les paramètres s, t) décrivant $\mathbb{R}$, sont des *représentations paramétriques* de la droite et du plan.
- **Remarque 14.5 (équations dans l'espace) :** dans l'espace, une équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$, avec α, β, γ non tous nuls, décrit un *plan* (cours 15 [2]), et non une droite. Une droite de l'espace n'a pas une seule équation : on la décrit par une représentation paramétrique, ou par un *système* de deux équations, celles de deux plans qui la contiennent.

- **Exemple 14.10 (éliminer le paramètre) :** dans un repère de l'espace, la droite passant par $A(1,2,3)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2,1,0)$ a pour représentation paramétrique $x = 1+2t$, $y = 2+t$, $z = 3$, $t \in \mathbb{R}$. On exprime t à l'aide d'une coordonnée de M dont le coefficient dans $\vec{u}$ n'est *pas nul*, ici $t = y - 2$; on obtient $x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$, puis on vérifie la réciproque : si $x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$, le réel $t = y - 2$ convient. La droite est donc l'ensemble des points tels que $x - 2y + 3 = 0$ et $z = 3$; les deux sens sont nécessaires.

5 Repères orthonormés

- **Définition 14.12 (vecteurs orthogonaux, base orthonormée) :** deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont *orthogonaux*, et l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si l'un d'eux est nul, ou si, écrits avec une même origine, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires. Un vecteur est *unitaire* si sa norme vaut 1. Une base du plan (resp. de l'espace) est *orthonormée* si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux deux à deux ; un repère est *orthonormé* si sa base l'est.
- **Théorème 14.17 (orthogonalité, admis) :** (i) la définition ne dépend pas de l'origine choisie ; (ii) si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $s\vec{u} \perp t\vec{v}$ pour tous réels s, t ; (iii) si $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$, alors $\vec{w} \perp (s\vec{u} + t\vec{v})$.
- **Théorème 14.18 (norme et distance en repère orthonormé) :** (i) dans une base *orthonormée* du plan, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ si $\vec{u}(x,y)$, et, dans un repère orthonormé, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; (ii) dans une base *orthonormée* de l'espace, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ si $\vec{u}(x,y,z)$, et, dans un repère orthonormé,

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

  Ces formules ne valent que dans une base ou un repère orthonormés.
- **Exemple 14.12 (symétriques d'un point) :** soit $M(x,y)$. Dans *tout* repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le symétrique de M par rapport à O est $(-x,-y)$. Dans un repère *orthonormé*, ses symétriques par rapport à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées sont $(x,-y)$ et $(-x,y)$.

Références

[1] Mohamed Kadhem Karray. Cours 14. Vecteurs et géométrie dans le plan et l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.

[2] Mohamed Kadhem Karray. Cours 15. Produit scalaire des vecteurs, géométrie dans l'espace, niveau baccalauréat. https://mohamedkadhem.com/baccalaureat/.